Terminale S spécialité Physique, SVT, SI
Épreuve de Mathématiques
Corrigé

Exercice 1 (3 points).
On considère une fonction f définie sur un intervalle I et un nombre réel a appartenant à I.

1) On dit que «f est dérivable en a»lorsque la limite du quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe lorsque h tend vers 0 ; dans ce cas on la note $f'(a)$. Graphiquement, cela signifie qu'au point d'abscisse a, la courbe représentative de f admet une tangente non verticale de coefficient directeur $f'(a)$.
2)
   - La fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue et dérivable en tout réel a (polynôme) ;
   - La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0 (présence de deux demi-tangentes au point d'abscisse 0) ;
   - Il est impossible d'avoir une fonction f qui n'est pas continue en a et qui soit dérivable en a car, d'après le cours :

   $$f \text{ dérivable en } a \Rightarrow f \text{ continue en } a.$$

   - La fonction f qui vaut 0 sur $]-\infty, 0[$ et 1 sur $[0, +\infty[$ n'est pas continue en 0 et donc pas dérivable non plus en 0.

Exercice 2 (5 points).

1) $(1+i)^6 = \left((1+i)^2\right)^3 = (1+i^2+2i)^3 = (1-1+2i)^3 = (2i)^3 = 2^3 i^3 = -8i.$
2) On considère l'équation :

   (E) $$z^2 = -8i$$

   (a) D'après la question 1 : $(1+i)^6 = \left((1+i)^3\right)^2 = -8i$, donc $(1+i)^3$ est solution de l'équation (E). Calculons cette solution :

   $$(1+i)^3 = (1+i)^2(1+i) = 2i(1+i) = -2+2i.$$

   (b) On a : $z^2 = -8i \iff z^2 = (-2+2i)^2 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & -2+2i \\ & \text{ou} & \\ z & = & 2-2i \end{array}\right.$. L'équation (E) a donc pour ensemble de solutions : $\mathscr{S} = \{-2+2i; 2-2i\}$.
3) $\left((1+i)^2\right)^3 = (1+i)^6 = -8i$ donc $(1+2i)^2 = 2i$ est solution de l'équation :

   (E') $$z^3 = -8i$$

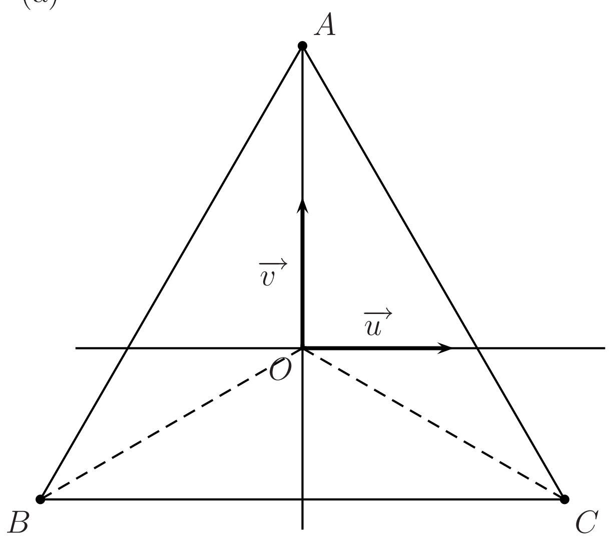
4) On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

(a) D'après l'écriture complexe d'une rotation de centre O :

- $b = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times (2i - 0) + 0 = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) 2i = -\sqrt{3} - i$
- $c = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times (b - 0) + 0 = \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} - i$

(b)
- $b = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2i$, donc : $b^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 \times (2i)^3 = e^{i2\pi} \times (2i)^3 = -8i$, donc b est solution de (E'). De même :
- $c = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times b$, donc : $c^3 = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 \times b^3 = e^{i2\pi} \times b^3 = -8i$, donc c est solution de (E')

5) (a)



(b) Le triangle ABC est un triangle équilatéral de centre O, par construction.

Exercice 3 (5 points).

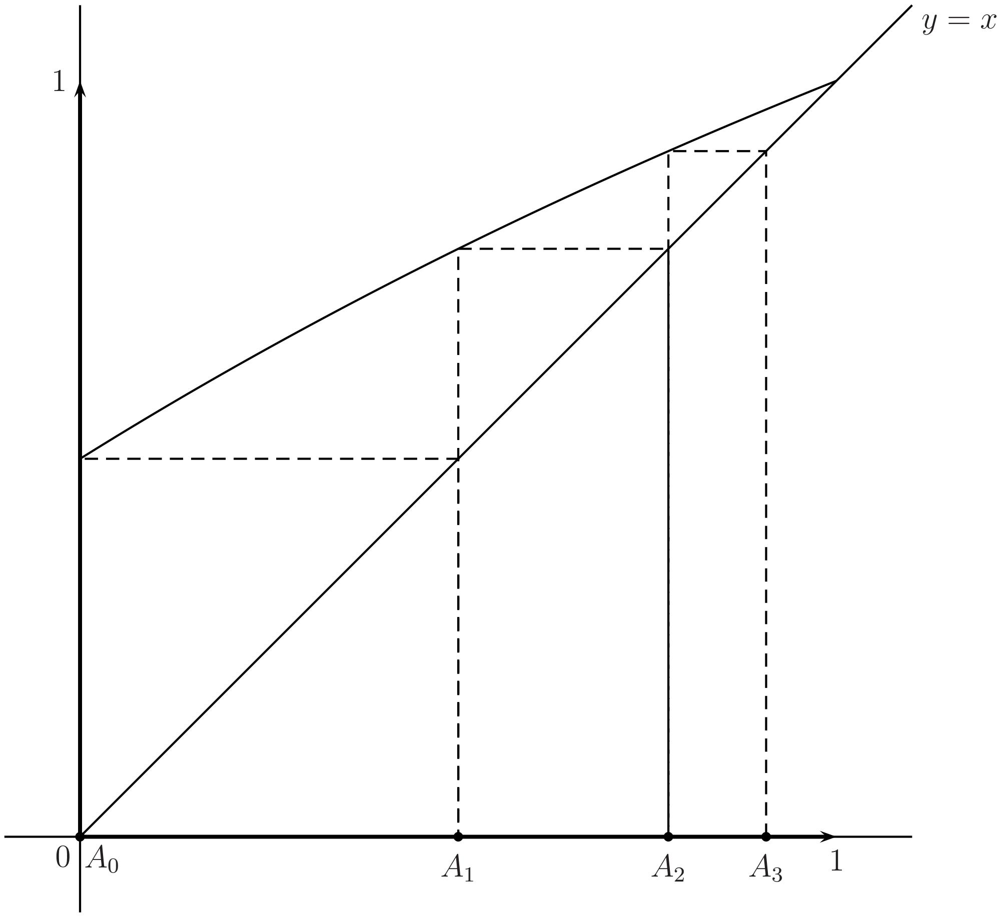
1)
- La fonction f est dérivable sur I (fraction rationnelle) et :

$$f'(x) = \frac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2}.$$

Donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur I.
- Soit $x \in I$, alors $0 \leqslant x \leqslant 1$, et comme f est croissante : $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$. Or $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = 1$, donc $f(x) \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right] \subset [0; 1]$. On a bien montré, que pour tout élément x dans I, $f(x)$ appartient aussi à I.

2) Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \in I$.
- $u_0 = 0 \in I$.
- Supposons que pour un certain entier k, on ait $u_k \in I$. On doit montrer que $u_{k+1} \in I$. Comme par définition de la suite, $u_{k+1} = f(u_k)$ et que $u_k \in I$, alors, d'après la question précédente, $f(u_k) \in I$, c'est-à-dire $u_{k+1} \in I$, ce qu'il fallait démontrer.
- En conclusion, pour tout entier n : $u_n \in I$.

3) (a)



(b) D'après le graphique, il semble que la suite (u_n) soit croissante et converge vers 1.

(c) Calculons :

(1) $$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - \frac{u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4}.$$

Or $(1 - u_n)(u_n + 2) = u_n + 2 - u_n^2 - 2u_n = -u_n^2 - u_n + 2$, donc on a bien :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4}.$$

(d)
- On a $u_n \in I = [0, 1]$, donc (u_n) est bornée.
- Comme $u_n \in [0, 1]$, $1 - u_n \geqslant 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n + 4 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1 - u_n)(u_n + 2)}{u_n + 4} \geqslant 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.
- La suite est croissante, et majorée, donc elle converge vers un réel ℓ.

(e)
- On a $u_n \in I$, donc $\ell \in I$, et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue sur I (car dérivable) ; donc ℓ vérifie l'équation $\ell = f(\ell)$.
- $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \dfrac{3\ell + 2}{\ell + 4} = \ell \Leftrightarrow 3\ell + 2 = \ell^2 + 4\ell \Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 9$, et pour racines 1 et 2, comme $\ell \in [0, 1]$, la seule possibilité est que : $\ell = 1$.

Exercice 4 (7 points).

Partie A

1) • La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de l'exponentielle et d'un polynôme), et $g'(x) = e^x + 1 > 0$, donc g est strictement croissante.
• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
• $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

2) La fonction g est continue (car dérivable), strictement croissante, donc d'après un théorème du cours : $g(]-\infty;+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} g(x); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[=]-\infty;+\infty[$. Or $0 \in]-\infty;+\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique que l'on notera α.
De plus à l'aide de la calculatrice, $g(-1,28) < 0$ et $g(-1,27) > 0$, donc $-1,28 < \alpha < -1,27$.

3) Comme $g(\alpha) = 0$ et g est croissante sur $\mathbb{R}$, le signe de $g(x)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{(xe^x + e^x)(e^x+1) - xe^xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{xe^{2x} + xe^x + e^{2x} + e^x - xe^{2x}}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(x + e^x + 1)}{(e^x+1)^2} = \frac{xg(x)}{(e^x+1)^2}.$$

Comme $e^x > 0$ et $(e^x+1)^2 > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
On en déduit que :
• f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$,
• f est croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

2) Par définition de α : $e^\alpha + \alpha + 1 = 0$, donc $e^\alpha = -(\alpha+1)$ et $e^\alpha + 1 = -\alpha$, donc :

$$f(\alpha) = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{-\alpha} = \alpha + 1.$$

Comme $-1,28 < \alpha < -1,27$, on en déduit : $-0,28 < f(\alpha) < -0,27$.

3) $\mathcal{T}$ a pour équation réduite : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Comme $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(0) = 0$, cela donne $y = \frac{1}{2}x$. Étudions maintenant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$:

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{2xe^x - x(e^x+1)}{2(e^x+1)} = \frac{xe^x - x}{2(e^x+1)} = \frac{x(e^x-1)}{2(e^x+1)}.$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$2(e^x+1)^2$		$+$		$+$	
$f(x) - \frac{1}{2}x$		$+$	0	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}$ est toujours au dessus de sa tangente $\mathcal{T}$.

4) En $-\infty$ il n'y a pas de forme indéterminée, et l'on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

5) En $+\infty$, il y a une forme indéterminée, mais : $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x(1+e^{-x})} = \dfrac{x}{1+e^{-x}}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, cela entraîne que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6) • $f(x) - x = \dfrac{xe^x}{e^x+1} - x = \dfrac{xe^x - x(e^x+1)}{e^x+1} = \dfrac{-x}{e^x+1}$.

• On a : $f(x) - x = \dfrac{-x}{x\left(\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}\right)} = \dfrac{-1}{\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}}$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (croissances comparées), on en déduit par opérations que $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$, ce qui prouve que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

• Comme $e^x + 1 > 0$, $f(x) - x$ a le même signe que $-x$:
⋆ sur $]-\infty; 0[$, $f(x) - x > 0$, donc $\mathscr{C}$ est au dessus de Δ ;
⋆ sur $]0; +\infty[$, $f(x) - x < 0$, donc $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ.

7)