

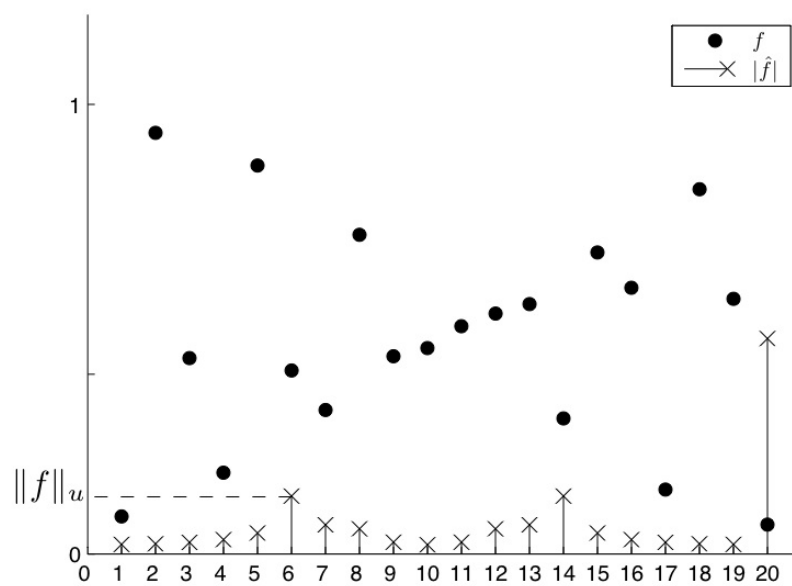
Eindige Fourier-Analyse in de Additieve Combinatoriek

Sam van Gool

22 juni 2007

Bachelorscriptie

Begeleiding: prof. dr. T. H. Koornwinder



KdV Instituut voor wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam



Samenvatting

De stelling van Szemerédi zegt dat verzamelingen met een positieve bovendichtheid voor iedere $k \geq 3$ een rekenkundig rijtje van lengte k bevatten.

In dit verslag bestuderen en vergelijken we twee bewijzen van deze stelling voor het geval $k = 3$ zoals gegeven door Tao en Vu in het boek Additive Combinatorics en door Roth in zijn artikel uit 1953.

Voor dit doel gebruiken we de technieken die Fourier-analyse op eindige groepen geeft om problemen uit het rijke vakgebied van de Additieve Combinatoriek aan te pakken.

Abstract

According to Szemerédi's theorem, sets of positive upper density contain an arithmetic progression of length k for every $k \geq 3$.

In this report, we study and compare two proofs of this theorem in the case $k = 3$ as given by Tao and Vu in the book Additive Combinatorics and by Roth in his article from 1953.

To achieve this goal, we use techniques from Fourier analysis on finite groups to tackle problems from the rich field of Additive Combinatorics.

Gegevens

Titel: Eindige Fourier-Analyse in de Additieve Combinatoriek

Auteur(s): Sam van Gool, sgool@science.uva.nl, 0468177

Website: <http://student.science.uva.nl/~sgool/>

Begeleider: prof. dr. T. H. Koornwinder

Tweede beoordelaar: dr. D. C. Gijswijt

Einddatum: 22 juni 2007

Korteweg de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

<http://www.science.uva.nl/math>

Afbeelding voorzijde: Een voorbeeld van een redelijk uniforme functie f op \mathbb{Z}_{20} met de absolute waarde van de Fourier-getransformeerde $|\hat{f}|$ en lineaire afwijking $\|f\|_u$.

Spelen met Verzamelingen (Populaire Samenvatting)

De wiskundige inhoud van deze scriptie is het beste uit te leggen met een eenvoudig gokspelletje.

Het spel gaat als volgt: ik neem een verzameling getallen in gedachten (ik geef de verzameling ook een naam: ik noem hem A), maar ik vertel jou niets over de verzameling A . Jouw doel is er achter te komen of er 3 getallen in mijn verzameling A voorkomen die **even ver** van elkaar af liggen. Als jij gelijk hebt, win jij, anders win ik.

Ik kan bijvoorbeeld de verzameling van alle ‘natuurlijke’ getallen in gedachten nemen: mijn verzameling A kan $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ zijn. Daar liggen **wel** 3 getallen in die even ver van elkaar af liggen, bijvoorbeeld 1, 2 en 3, maar ook 7, 10 en 13 zijn drie getallen in mijn verzameling A die even ver van elkaar af liggen.

Ik zou ook alleen maar de verzameling van even getallen in gedachten kunnen nemen, de verzameling A is dan $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$. Ook deze verzameling heeft zeker 3 getallen die even ver van elkaar af liggen, bijvoorbeeld 4, 6 en 8 of 200, 300 en 400. Het maakt dus niet uit hoe ver de getallen van elkaar af liggen, als ze maar **even ver** van elkaar af liggen.

Stel nu dat ik de verzameling $A = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$ in gedachten neem, alle machten van twee. Komen in deze verzameling 3 getallen voor die even ver van elkaar af liggen?

Het antwoord is nee. De getallen in de verzameling A komen namelijk steeds verder van elkaar af te liggen: tussen 2 en 4 ligt slechts 1 getal, maar tussen 4 en 8 al 3 en tussen 16 en 32 liggen 15 getallen in; het lukt dus nooit om 3 getallen in de verzameling A te vinden die even ver van elkaar af liggen.

Als we het spel op deze manier spelen, weet jij nog niets over de verzameling die ik in gedachten neem en kun je dus alleen maar gokken of er wel of niet 3 getallen in de verzameling A even ver van elkaar af liggen. Een verzameling waarin **helemaal geen** 3 getallen voorkomen die even ver van elkaar af liggen, heet in deze scriptie een \mathcal{A}_3 -verzameling. De verzameling van twee-machten, $A = \{2, 4, 8, 16, 32, \dots\}$, is dus een voorbeeld van een \mathcal{A}_3 -verzameling.

We versoepelen de regels van het spel enigszins: jij mag mij één vraag stellen over mijn verzameling A . Dingen die je me natuurlijk niet mag vragen zijn “Is A een \mathcal{A}_3 -verzameling?”, of “Noem de getallen op die in A voorkomen”, of een andere vraag waardoor je onmiddellijk zou winnen (en waardoor wiskundigen het spel ‘triviaal’ zouden noemen).

Je zou bijvoorbeeld wél kunnen vragen:

“Hoeveel getallen zitten er in de verzameling A ?”

Als het aantal getallen in A minder is dan 3 (misschien heb ik wel alleen maar $A = \{17, 900\}$ in gedachten genomen), dan weet je alvast zeker dat er nooit 3 getallen in A even ver van elkaar af liggen, omdat er niet eens 3 getallen in A zitten.

Aan de andere kant, als ik $A = \{1, 2, 7\}$ in gedachten had genomen, dan is mijn antwoord op jouw vraag “3”, maar dat antwoord helpt jou niet echt verder: je weet nog steeds niet zeker of er drie getallen in A voorkomen die even ver van elkaar af liggen.

Vraag. *Welke vraag kun je mij het beste stellen?*

In 1953 bedacht wiskundige Klaus Roth een goede vraag. De vraag zag er op de manier waarop Roth hem opschreef nogal ingewikkeld uit, maar het idee is ook te volgen zonder de lastige wiskundige techniek precies te begrijpen.

De vraag van Roth bestaat uit de volgende 4 stappen (stap 4 geeft de eigenlijke vraag, waarop ik antwoord (a) of (b) kan geven):

1. Kies een willekeurig ‘grensgetal’ N .
2. Tel hoeveel getallen uit de verzameling A onder dat grensgetal N liggen.
3. Deel dit aantal door het grensgetal N .
4. Als je het grensgetal N heel groot kiest, ligt de uitkomst van stap 3 dan (a) steeds dichterbij 0, of (b) altijd meer dan een vaste marge van 0 af?

Stel dat mijn verzameling A bestaat uit alle even getallen.

Als ik dan bijvoorbeeld als grensgetal $N = 11$ kies (stap 1), dan zijn er 5 even getallen tot en met N (stap 2), deel ik dit vervolgens door 11 (stap 3), dan krijg ik als uitkomst $\frac{5}{11} \approx \frac{1}{2}$.

Als ik $N = 20$ kies, dan zijn er 10 even getallen tot en met N . Ik bereken dan bij stap 3 $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Hoe groot ik het grensgetal N ook kies, ik zie dat ik **niet** steeds dichterbij 0 komen, maar bij stap 3 altijd een uitkomst krijg die zeker meer dan een vaste marge, bijvoorbeeld $\frac{1}{4}$ van 0 af ligt. In stap 4 hierboven is (b) dus waar.

Als mijn antwoord (b) is, dan is het **zeker** dat mijn verzameling A **geen** \mathcal{A}_3 -verzameling is: Klaus Roth kon in 1953 **bewijzen** dat een verzameling A die het antwoord (b) oplevert altijd 3 getallen moet bevatten die even ver van elkaar af liggen.

De wiskundige formulering van ‘ A levert antwoord (b) op’ is ‘ A heeft **positieve bovendichtheid**’. Roth’s vraag was dus:

Heeft A positieve bovendichtheid?

De stelling van Roth ondersteunt de bewering dat dit een goede vraag is:

Stelling (Roth, 1953). *Als A positieve bovendichtheid heeft, dan is A geen \mathcal{A}_3 -verzameling.*

Roth kon het spel dus winnen, als ik een verzameling met positieve bovendichtheid had gekozen. In deze scriptie worden twee verschillende manieren besproken om te bewijzen dat de stelling van Roth waar is.

Je kunt je nu afvragen of het omgekeerde ook waar is:

Vraag. *Als er 3 getallen in A zijn die even ver van elkaar af liggen, heeft A dan altijd positieve bovendichtheid?*

Het antwoord op deze vraag is helaas nee. De vraag van Roth is wel goed, maar als mijn antwoord bij stap 4 hierboven (a) is, dan kan het nog steeds gebeuren dat er in mijn verzameling A tóch drie getallen zijn die even ver van elkaar af liggen. Jij kunt dan, nadat je je ene vraag verspeeld hebt, niets anders doen dan gokken.

Een voorbeeld van een verzameling waarbij dit zou gebeuren is de verzameling van alle priemgetallen.

Een **priemgetal** is een getal dat je niet kunt delen zonder een rest over te houden (behalve wanneer je deelt door 1 of het getal zelf).

Het getal 5 is dus een priemgetal, want als je 5 probeert te delen door 2 of 4, dan houd je een rest van 1 over, of als je 5 probeert te delen door 3, dan houd je een rest van 2 over. Je kunt er zelf door proberen achterkomen dat 19 bijvoorbeeld ook een priemgetal is. (104239 trouwens ook, maar dat is wat moeilijker uit te rekenen.)

Maar 20 is bijvoorbeeld geen priemgetal, want als je 20 deelt door 10 houd je geen rest over.

De verzameling van priemgetallen begint met 2, 3, 5, 7, 11, 13, . . . en gaat zo eindeloos door. Dat er oneindig veel priemgetallen zijn, werd voor het eerst opgeschreven door Euclides van Alexandrië. Euclides was in 300 voor Christus de eerste die een wiskundig werk (“*Elementen*”) schreef, dat onder andere over priemgetallen ging. Sindsdien vragen wiskundigen zich af hoeveel **structuur** er in de priemgetallen zit: zijn de priemgetallen net zo gestructureerd als bijvoorbeeld de even getallen?

Uit al dit onderzoek is onder andere gebleken dat het antwoord op de vraag van Roth ‘Nee’ is (in wiskundige termen: de priemgetallen hebben geen positieve bovendichtheid, maar bovendichtheid gelijk aan nul).

Toch zijn er 3 priemgetallen die even ver van elkaar af liggen: 3, 5 en 7 bijvoorbeeld. Als ik de priemgetallen in gedachten heb genomen, geeft mijn antwoord op de vraag van Roth jou dus onvoldoende informatie.

Er is tot nu toe nog niemand die een handige vraag heeft bedacht waarmee jij altijd helemaal zeker kunt zijn dat je het spel wint; hoewel je van verzamelingen met positieve bovendichtheid dus zeker weet dat er 3 getallen in voorkomen die even ver van elkaar af liggen, kun je van een verzameling met bovendichtheid 0 niet uitsluiten dat er tóch 3 getallen in voorkomen die even ver van elkaar af liggen.

Wel zijn er uitbreidingen voor het spel bedacht: je zou in plaats van 3 getallen die even ver van elkaar af liggen, ook kunnen kijken naar meer getallen, 4 of 5 of 2000, die allemaal even ver van elkaar af liggen.

Een verzameling waarin nooit k getallen voorkomen die even ver van elkaar af liggen heet een \mathcal{A}_k -verzameling. Jouw doel wordt nu er achter te komen of mijn verzameling A een \mathcal{A}_k -verzameling is.

In 1975 bewees Endre Szemerédi dat de vraag over positieve bovendichtheid ook werkt voor de andere spellen:

Stelling (Szemerédi, 1975). *Als A positieve bovendichtheid heeft, dan is A geen \mathcal{A}_k -verzameling.*

In 2004 bewezen Ben Green en Terence Tao dat de priemgetallen, die bovendichtheid

nul hebben, toch nooit een \mathcal{A}_k -verzameling zijn, hoe groot k ook is: er zijn altijd nog k priemgetallen die even ver van elkaar af liggen.

Stelling (Green-Tao, 2004). *De verzameling van priemgetallen is geen \mathcal{A}_k -verzameling, voor iedere k .*

Als ik het spel zou spelen, zou ik dus altijd voor mijn verzameling A de verzameling van priemgetallen kunnen kiezen om jou op het verkeerde been te zetten: de priemgetallen zijn altijd een \mathcal{A}_k -verzameling (het maakt niet uit wat k is), maar mijn antwoord op jouw vraag is altijd ‘Nee’.

Deze stelling is (misschien onverwacht, omdat hij er nu zo simpel uit ziet) moeilijk te bewijzen. En dat terwijl hierboven nog bleek dat het heel makkelijk is om 3 of 4 priemgetallen die even ver van elkaar af liggen op te schrijven.

Het lastige onderdeel van de stelling ligt besloten in het zinsdeel *voor iedere k* : we willen niet alleen 3,4 of 5 priemgetallen vinden die even ver van elkaar af liggen, we willen *ieder denkbaar aantal* priemgetallen dat even ver van elkaar af ligt.

In mijn scriptie bespreek ik de technieken die voor het bewijs van de stelling van Roth nodig zijn en die samen met andere technieken ook gebruikt kunnen worden voor de moeilijkere bewijzen van de stelling van Szemerédi en de stelling van Green-Tao. Deze technieken heten ‘Eindige Fourier-analyse’, vandaar het eerste deel van de titel.

De ‘Additieve Combinatoriek’ uit de titel van deze scriptie is niets anders dan het vakgebied dat vragen over verzamelingen stelt, zoals in de vorm van bovenstaand spel: wat voor informatie over verzamelingen is genoeg om iets te kunnen concluderen over hun structuur en eventuele regelmaat? Zoals bijvoorbeeld: wat voor informatie is voldoende om te kunnen concluderen dat een verzameling een \mathcal{A}_k -verzameling is?

Hoe Eindige Fourier-analyse werkt, staat beschreven in Hoofdstuk 1 van deze scriptie. De stelling van Szemerédi wordt in een aantal verschillende versies besproken in Hoofdstuk 2: de eerste versie lijkt erg op de spel-vorm die hierboven besproken is, de tweede versie is wiskundiger van aard, maar heeft als groot voordeel dat hierop de technieken van de Eindige Fourier-analyse makkelijker toe te passen zijn.

In de daaropvolgende hoofdstukken bespreek ik twee verschillende bewijzen van de stelling van Roth, in Hoofdstuk 3 het ‘moderne’ bewijs zoals Terence Tao dat geeft in zijn boek ‘Additive Combinatorics’ [8], in Hoofdstuk 4 het oorspronkelijke bewijs van Roth, zoals beschreven in zijn artikel uit 1953 [4], maar wel enigszins vertaald naar de moderne terminologie en technieken van de Eindige Fourier-analyse.

Al de hoofdstukken vereisen een zekere wiskundige voorkennis, de eerste twee jaar van een universitaire studie wiskunde moeten volstaan. In het bovenstaande hoop ik desalniettemin aan een breder publiek een indruk te hebben kunnen geven van de ‘smaak’ van het rijke vakgebied van de Additieve Combinatoriek.

Bibliografie

- [1] Euclides, *Elements*, ed. J. L. Heiberg, R. Fitzpatrick (<http://farside.ph.utexas.edu/euclid.html>)
- [2] B. Green, *Arithmetic progressions in sumsets*, *Geom. Funct. Anal.* **12** (2002), 584-597
- [3] B. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions* (2004), arXiv:math/0404188v5.
- [4] K. F. Roth, *On certain sets of integers*, *J. London Math. Soc.* **28** (1953), 245-252.
- [5] Victor Pessers, Sam van Gool, *Het optellen van deelverzamelingen van Abelse Groepen* (2006), tweedejaarsproject UvA.
- [6] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag New York Inc (1982).
- [7] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis: An Introduction*, Princeton University Press (2003).
- [8] T. Tao, V. Vu, *Additive Combinatorics*, Cambridge University Press (2006).