1. Bewegung mit Reibung

Reibungskräfte

Ziele dieses Kapitels

1. Sie kennen die wichtigsten Reibungskräfte und können diese im Zusammenhang mit der Grundgleichung der Mechanik anwenden.
2. Sowohl die Fallbewegung als auch den schiefen Wurf können Sie mit Luftreibung berechnen mit Hilfe von Tabellenkalkulationen.

1 *i* Sie haben schon ordentlich viel Erfahrung im Umgang mit Kräften. Deshalb können wir die Betrachtungsrichtung auch einmal umdrehen. Während bisher jeweils die Formeln über die Kräfte mehr oder weniger streng hergeleitet wurden, sollen Sie nun mit Formeln über Kräfte konfrontiert werden, um aufgrund jener Aussagen über die Eigenschaften der Kräfte abzuleiten.

2 ? Nach der Lektüre dieses Absatzes sollten Sie imstande sein, die Angaben im Kasten rechts zu vervollständigen: Vom Skript GF3 wissen Sie schon, dass diese Formeln zur Berechnung der Haft–, Gleit– und Rollreibungskräfte verwendet werden. Die Stärke dieser Kräfte hängen von der Normalkraft, erstaunlicherweise aber nicht von der Auflagefläche und (bei F_r und F_g) auch nicht von der Geschwindigkeit der bewegten Körper ab! Die Proportionalitätsfaktoren heissen Reibungszahlen und sind von den Materialien des Körpers und der Unterlage abhängig. Einige Werte finden Sie in der Tabellensammlung, Seite 11. Eine Besonderheit der Haftreibungskraft muss noch erwähnt werden: Die Haftreibungskraft kann verschiedene Werte annehmen, wie wir in Kapitel 5 von GF3 diskutiert haben. Die angegebene Formel kann nur zur Berechnung der maximalen Haftreibungskraft verwendet werden.

.... $F_g = f_g \cdot F_N$

.... $F_r = f_r \cdot F_N$

.... $F_{h\max} = f_h \cdot F_N$

$f_h =$

$f_g =$

$f_r =$

3 ? Obwohl die Formel im Kasten rechts ganz anders aussieht, beschreibt sie doch eine Kraft, welche in die gleiche Kategorie gehört wie die Kräfte bei **2**. Zudem fällt auf, dass diese Kraft von vielen verschiedenen Grössen abhängig ist. Welche Kraft wird beschrieben? Welche Bedeutung könnten die einzelnen Grössen wohl haben? Das Rätsel um diese Formel wird möglicherweise gelöst, wenn Sie die Angaben zu c_W auf Seite 11 der Tabellensammlung studieren.

Halten Sie auch die Ausührungen fest, die im Unterricht mit Hilfe einer Versuchsapparatur gemacht werden.

....

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

$A =$

$\rho =$

$v =$

$c_W =$

Rechnen mit Reibungskräften

4 ? **Schlitten**: Die Werte für die Haftreibungs- und Gleitreibungszahl von Stahl auf Eis entnehmen Sie der Tabellensammlung.

a) Welche Kraft ist mindestens nötig, um einen Schlitten von 64 kg Masse in Bewegung zu versetzen?

b) Welche Beschleunigung erfährt der Schlitten, wenn die bei a) berechnete Kraft weiterhin konstant auf den Schlitten wirkt?

5 ? **Fallschirmspringer**: Wenn der Fallschirm einmal geöffnet ist, so fällt der Fallschirmspringer nach kurzer Abbremszeit mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Warum das so ist, haben Sie bei einer früheren Aufgabe in Kapitel 5 (Skript GF3) überlegt. Oft interessiert die Frage, wie schnell denn nun so ein Fallschirmspringer fällt.

a) Berechnen Sie die **Fallgeschwindigkeit** bei geöffnetem Schirm für die folgenden Angaben: Gesamte Masse = 80 kg, Widerstandszahl des Schirmes = 1.4, Stirnfläche des Schirmes = 35 m^2.

b) Aus welcher **Höhe** muss man ohne Fallschirm (im freien Fall) springen, um mit derselben Geschwindigkeit am Boden aufzutreffen?

6 ? **Spielzeugauto**: Bestimmen Sie die Rollreibungszahl unseres Modellautos. Sie finden alle nötigen Angaben irgendwo in den Unterlagen zum Skript GF3.

7 ? **Kurvenfahrendes Auto**: Wenn ein Auto eine Kurve fährt, so muss die Haftreibung der Pneus für die Zentripetalkraft sorgen. Fährt ein Auto zu schnell in die Kurve, so wäre eine Zentripetalkraft erforderlich, die grösser ist als die maximal mögliche Haftreibungskraft. In diesem Fall ist es dem Auto nicht mehr möglich, die Kurve zu fahren; es beginnt zu rutschen und kommt von der Strasse ab (Trägheitssatz!). Damit ein Auto korrekt eine Kurve fahren kann, muss also

$$F_Z < F_{hmax} = f_h \cdot F_N$$

erfüllt sein. Berechnen Sie die maximal mögliche Geschwindigkeit für folgende Vorgaben: Die Masse des Autos sei 1000 kg und der Kurvenradius 20 m.

a) Die Strasse ist horizontal und trocken.
b) Die Strasse ist horizontal und nass.

8 R Mit einer Feder zieht man an einem Wagen mit der Masse 10 kg auf horizontaler Unterlage. Die Feder, deren Federkonstante 80 N/m beträgt, wird dabei um 15 cm gedehnt. Die Rollreibungszahl beträgt 0.04. Berechnen Sie die **Beschleunigung** des Wagens.

9 R Die Gleitreibungszahl für **Stahl auf Stahl** beträgt etwa 0.1, wenn die Berührungsflächen trocken sind. Werden diese mit Öl geschmiert, so wird die Gleitreibungszahl auf etwa 0.01 vermindert. Können Sie diesen Sachverhalt anschaulich erklären?

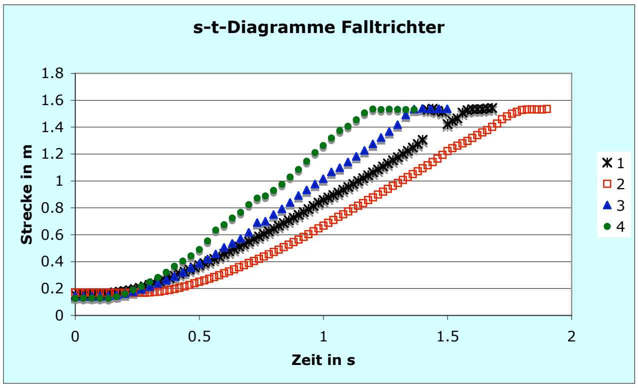
10 R Auf horizontaler Unterlage wird mit einer Kraft von 42 N an einem Holzklotz der Masse 7.5 kg gezogen. Die Gleitreibungszahl beträgt 0.4. Berechnen Sie die **Beschleunigung**.

11 R Erläutern Sie anhand der Formel für die Luftwiderstandskraft, wie ein **Velorennfahrer** versuchen kann, den Luftwiderstand zu verringern.

Fallbewegung mit Luftwiderstand

12 Sie erinnern sich an das Kapitel zum freien Fall im Skript GF3? Wir überlegten uns grob, wie das v–t–Diagramm eines in Luft fallenden Körpers aussieht. Diese Sache schauen wir uns nun genauer an.

Der Autor des Skripts hat versucht, die Fallbewegung von leichten Papiertrichtern mit dem "Motion Detector" zu erfassen. Das ist aber nur beschränkt gut gelungen, wie die Graphiken zeigen. Der Grund ist: Die Papiertrichter fallen nicht stabil genug, sie geraten in eine leichte Schlinger- und Schaukelbewegung und reflektieren das Ultraschall-Signal des Detektors zu wenig präzis.



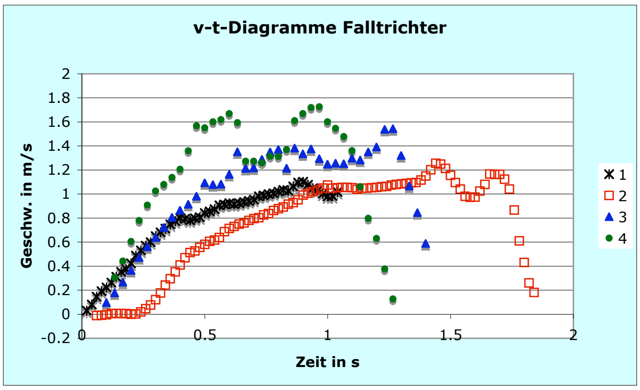
Dennoch sollte es möglich sein, durch Vergleich der Kurven über die 4 Trichter Aussagen zu machen.

1: ....

2: ....

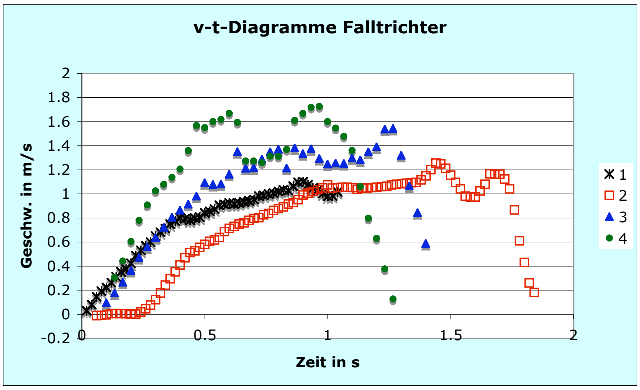
3: ....

4: ....



Das zweite v-t-Diagramm dient dem Einzeichnen der mutmasslich idealen Graphen.

13 Bestimmen Sie aufgrund der idealen Kurven in allen vier Fällen den **c_w-Wert** des Papiertrichters. (Vergleiche mit Aufgabe **5**)



14 Nun fragen wir uns, ob man diese Graphen nicht auch **rechnerisch** erzeugen kann. Das sollte doch wenigstens näherungsweise möglich sein, wenn man in vielen und genügend kleinen Schritten rechnet.

Legen Sie zuerst die Anfangswerte für einen Fall der Messung fest:

$t_o = 0$; $v_o = 0$; $\rho \approx 1.2$ kg/m³ ; $d \approx 15$ cm

$\Delta t =$ $m =$ $c_w \approx$

1. Schritt: Berechnen Sie für den Start der Reihe nach

$F_{Res}(t_o) =$ $a(t_o) =$

Δv während $\Delta t =$ $t_1 = t_o + \Delta t =$

$v(t_1) =$

2. Schritt: Berechnen Sie mit der Kenntnis von $v(t_1)$

$F_{Res}\,(t_1) =$ $a(t_1) =$

Δv während $\Delta t =$ $t_2 = t_1 + \Delta t =$

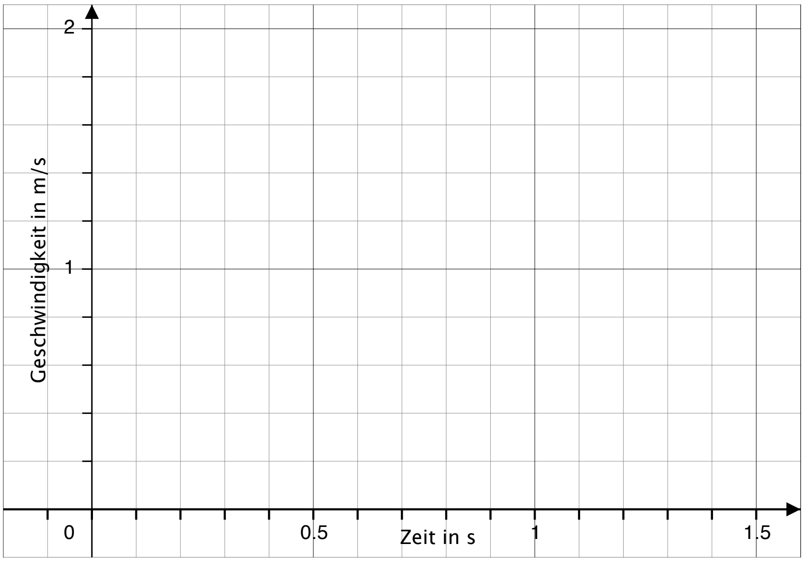
$v(t_2) =$

Fortsetzung: Setzen Sie die Rechnung fort und überprüfen Sie, ob Sie jene Endgeschwindigkeit erreichen, die Sie im Diagramm abgelesen haben.

15 ?

In der Klasse werden verschiedene Teams gebildet. Diese haben den Auftrag, als Fortsetzung von Aufgabe **14** die numerischen Berechnung zur Erstellung des Diagramms unten möglichst effizient durchzuführen. Organisieren Sie sich entsprechend.

Die Tabelle rechts könnte Ihnen helfen, die Übersicht nicht zu verlieren.



Zeit t	$v(t)$	F_L	$a = \frac{F_{\text{Res}}}{m}$	Δv

16 i

Sie haben es natürlich längst bemerkt, Berechnungen dieser Art lassen sich viel lustvoller und sicherer mit dem Computer durchführen, insbesondere eignen sich **Tabellenkalkulationsprogramme** dafür. Im ICT-Block Tabellenkalkulation lernen Sie den Umgang mit diesem Werkzeug. Als Übung werden Sie die Fallbewegung unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes programmieren.

17 ?

Sie gestalten eine **Exceltabelle**, welche folgende Elemente enthält:

Titel der Aufgabe und Autorennamen

Liste der Konstanten mit definierten Namen (z.B. Dt für Δt, *Dichte* für ρ, ...)

Die Tabelle oben rechts so programmiert, dass sie durch herunterziehen beliebig gross gemacht werden kann.

Eine Tabelle mit Originalmesswerten (als s–t–Tabelle von der Homepage herunterzuladen) und $v(t)$ berechnen.

Ein Punkt(x,y)-Diagramm mit korrekten Beschriftungen (siehe Seite 4) für die v–t–Diagramme (oberhalb der Tabellen einfügen). Einfügen der berechneten und gemessenen Werte als zwei Reihen in das Diagramm.

Evtl. mit Schiebereglern die Konstanten so verändern, dass Messwerte und berechnete Werte möglichst gut zusammenpassen.

18 Ein paar Ergebnisse aus den numerischen Untersuchungen halten wir gemeinsam fest. Insbesondere erkennen wir, dass unsere Rechnung mit der Luftwiderstandsformel beim ganz leichten Falltrichter schlecht mit den Messwerten übereinstimmt. Das hängt damit zusammen, dass bei langsamer und **laminarer** Strömung, d.h. bei einer Strömung ohne Wirbelbildung, die Luftwiderstandskraft anders von der Strömungsgeschwindigkeit abhängt als in unserer Formel für F_L beschrieben.

19 Wir können nun uns nun einer noch schwierigeren Aufgabe zuwenden. Wie verläuft die Flugbahn eines schief abgeworfenen Gegenstandes in der Luft? Welches ist der optimale Abschusswinkel für eine möglichst grosse Reichweite?

Zuerst allerdings studieren wir den schiefen Wurf für den Fall, dass der Luftwiderstand vernachlässigbar ist.

Der schiefe Wurf

20 Im Unterricht wird eine Abschussvorrichtung gezeigt, welche gleichzeitig eine Stahlkugel frei fallen lässt und eine andere horizontal weg schiesst. Skizzieren Sie die Vorrichtung und halten Sie die Beobachtung fest.

Superpositionsprinzip für Bewegungen

21 ? Von einem 70 cm hohen Tisch wird eine Stahlkugel in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit 1 m/s weggeschossen. Wo trifft die Kugel auf dem Boden auf?

22 Die vorherige Aufgabe erweitern wir nun auf eine schief abgeschossene Kugel. Wir versuchen, ein Ziel in einer vorgegebenen Entfernung auf der richtigen Höhe zu platzieren. Wir gehen dabei vom Superpositionsprinzip der Bewegungen aus, indem wir die **geradlinig gleichförmige Bewegung** in Abschussrichtung überlagern mit der **Fallbewegung mit Start aus dem Stillstand**, die im Moment des Abschusses beginnt.

a) Zuerst müssen wir die Abschussgeschwindigkeit unserer Vorrichtung herausfinden. Das machen wir mit der gemessenen Flughöhe beim vertikalen Abwurf.

b) Danach berechnen wir die Flugzeit bis zur vertikalen Ebene in der gewünschten horizontalen Entfernung.

c) Die Flugzeit ist gleichzeitig auch die Fallzeit. Damit berechnen wir die Fallhöhe von jenem Punkt aus gemessen, wo die geradlinige Bahn die vertikale Ebene schneidet und bekommen somit den Ort des Ziels.

23 ? Mit den oben durchgespielten Überlegungen können Sie nun für jeden Zeitpunkt die **Koordinaten** (mit der Abschussstelle im Koordinaten-Ursprung) des Flugobjektes berechnen.

Für den schiefen Wurf ohne Luftwiderstand gilt:

24 ? Mit Hilfe der Ergebnisse von **23** können weitere Formeln zur Beschreibung der Flugbahn hergeleitet werden:

a) Drücken Sie die momentane Höhe über der Horizontalen (also y) durch x aus. Kommentar?

b) Bestimmen Sie die **Flugweite** x_w (bezüglich der Horizontalen) als Funktion des Abschusswinkels α und der Abschussgeschwindigkeit v_o.

c) Bei welchem Abschusswinkel α_{max} ist die Flugweite maximal?

d) Bestimmen Sie die $y-$Koordinate y_{max} des **höchsten Punktes** der Flugbahn als Funktion des Abschusswinkels α und der Abschussgeschwindigkeit v_o.

Weiter gilt für den schiefen Wurf:

25 ? Die **Stahlkugel** vom Experiment **22** wurde ungefähr mit der Geschwindigkeit 5 m/s abgeschossen. Der Abschusswinkel betrug etwa 30°.

a) Bestimmen Sie je für einen Abschuss auf der Erde und auf dem Mond unter obgenannten Bedingungen die Flugweite.

b) Bestimmen Sie für beide Fälle von a) den höchsten Punkt der Flugbahn.

c) Die Abschussstelle lag etwa 80 cm über dem Boden. Wo trifft die Kugel auf dem Boden auf?

26 ? Die Rechnungen der vorherigen Aufgabe sind natürlich unter der idealisierten Bedingung der Reibungsfreiheit gemacht worden. Im Falle der relativ langsamen Stahlkugel ist das noch gerechtfertigt, nicht mehr aber bei leichten und grösseren Körpern (Bälle zum Beispiel).

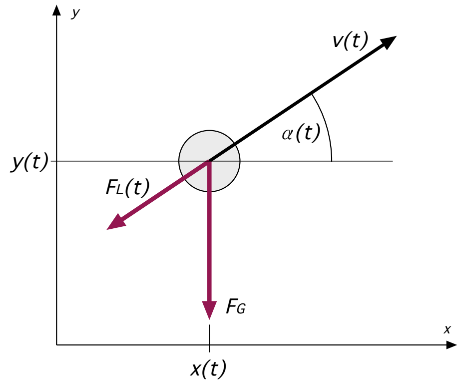
Es stellt sich also die Frage, wie sich der Luftwiderstand auf die Flugbahn auswirkt. Die Frage kann - Sie ahnen es - nur mit **numerischer Näherungsrechnung** gelöst werden. Gehen Sie schrittweise an dieses Problem heran.

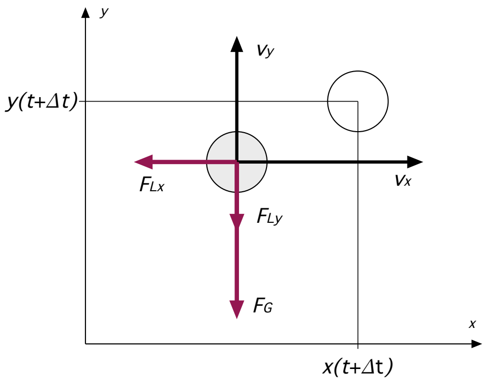
a) Gestalten Sie in einer Excelmappe zuerst eine Tabelle, in welcher Sie die Flugbahnkoordinaten mit den Ergebnissen von **23** berechnen und in einem Diagramm darstellen.

b) Berechnen Sie in einer zweiten Tabelle die Flugbahn durch ein numerisches Näherungsverfahren, indem Sie in jedem Rechenschritt die Beschleunigung aus der resultierenen Kraft bestimmen und daraus die Bewegungen in $x-$ und $y-$Richtung während eines Zeitschrittes Δt berechnen.

c) Ergänzen Sie nun die Berechnung von b) durch den Einfluss der Luftwiderstandskraft. Das Ziel ist eine Tabelle mit einem Diagramm, die es erlaubt mit Hilfe von Schiebereglern die Grössen für c_w, α, v_o zu verändern, um so deren Einfluss auf die Flugbahn zu untersuchen. Viel Glück!

27 *i* Für die Lösung der Aufgabe **26** kann das Vorgehen anhand der Skizzen rechts erläutert werden: Die obere zeigt die Momentaufnahme des Körpers zum Zeitpunkt t; dann befindet er sich am Ort mit den Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$ und hat die Geschwindigkeit $v(t)$. Die Luftwiderstandskraft F_L wirkt genau der Bewegungsrichtung entgegen. Um nun den Ort zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ zu bestimmen, macht man sich das Superpositionsprinzip zunutze: Man studiert die Ortsänderung in x– und y–Richtung unabhängig voneinander mittels einer Näherungsrechnung für einen kleinen Zeitschritt Δt.





geg: $x = x(t)$; $y = y(t)$; $v_x = v(t)$; $v_y = v_y(t)$; Δt

ges: $x(t + \Delta t)$; $y(t + \Delta t)$; $v_x(t + \Delta t)$; $v_y(t + \Delta t)$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \qquad F_L = \frac{1}{2}\cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2$$

$$F_{Lx} = -F_L \cdot \cos(\alpha) = -F_L \cdot \frac{v_x}{v} \qquad F_{Ly} = -F_L \cdot \frac{v_y}{v}$$

$$a_x = \frac{F_{Lx}}{m} \qquad a_y = \frac{F_{Ly}}{m} - g$$

$$\Delta v_x = a_x \cdot \Delta t \qquad \Delta v_y = a_y \cdot \Delta t$$

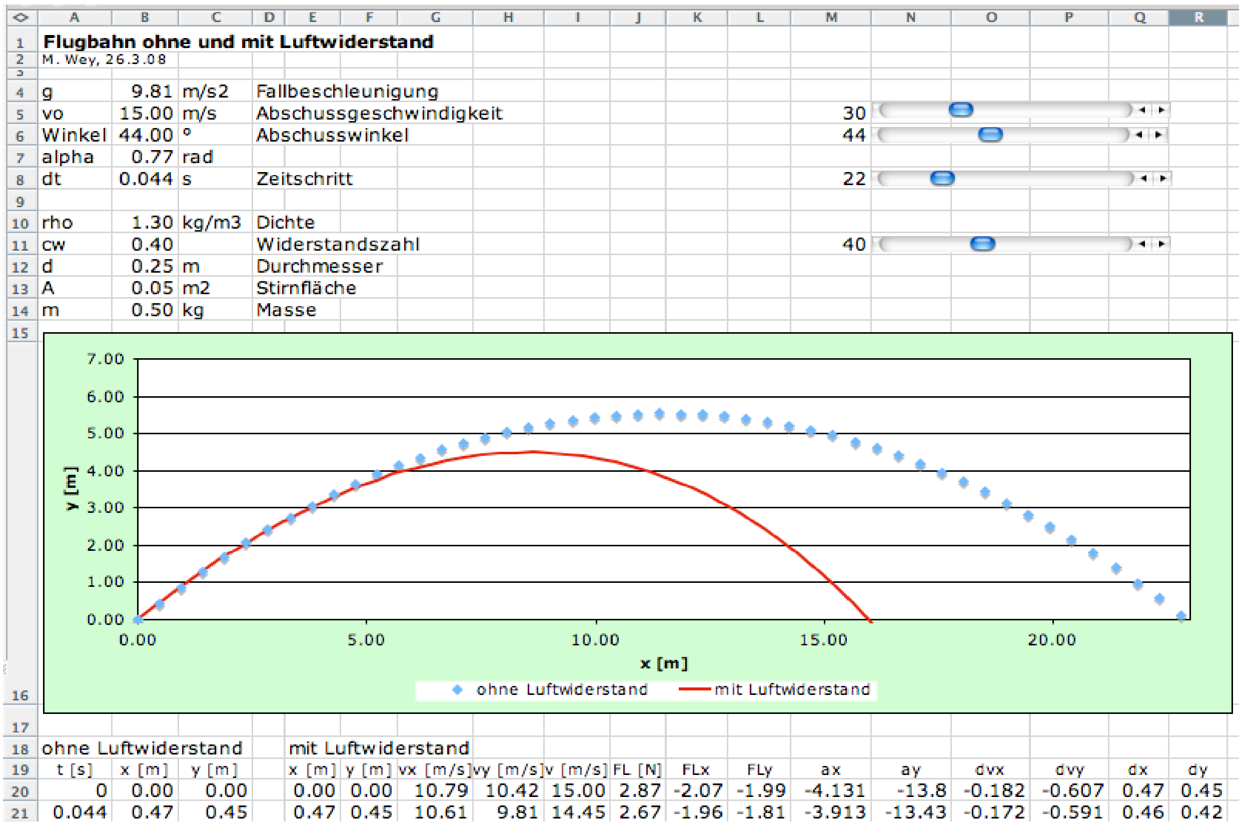
$$\Delta x = \overline{v_x} \cdot \Delta t = \left(v + \frac{\Delta v_x}{2}\right)\cdot \Delta t \qquad \Delta y = \left(v + \frac{\Delta v_y}{2}\right)\cdot \Delta t$$

$$v_x(t + \Delta t) \approx v_x(t) + \Delta v_x \qquad v_y(t + \Delta t) \approx v_y(t) + \Delta v_y$$

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta x \qquad y(t + \Delta t) \approx y(t) + \Delta y$$

Mit den Grössen auf den letzten beiden Zeilen ist der Zustand des Körpers nach dem Zeitschritt Δt bestimmt und wird zum Ausgangspunkt für die nächste Wiederholung der Prozedur, usw.

Die links aufgeführten Rechenschritte sind in einer Excel-Arbeitsmappe implementiert (siehe Abbildung unten), die von der Homepage heruntergeladen und ausprobiert werden kann.



ohne Luftwiderstand			mit Luftwiderstand													
t [s]	x [m]	y [m]	x [m]	y [m]	vx [m/s]	vy [m/s]	v [m/s]	FL [N]	FLx	FLy	ax	ay	dvx	dvy	dx	dy
0	0.00	0.00	0.00	0.00	10.79	10.42	15.00	2.87	-2.07	-1.99	-4.131	-13.8	-0.182	-0.607	0.47	0.45
0.044	0.47	0.45	0.47	0.45	10.61	9.81	14.45	2.67	-1.96	-1.81	-3.913	-13.43	-0.172	-0.591	0.46	0.42

28 Halten Sie unter dieser Nummer die **Ergänzungen** fest, die wir im Unterricht zu diesem Kapitel (vielleicht) gemacht haben.

❑ Wir haben keine Ergänzungen gemacht.
❑ Ja, wir haben Ergänzungen vorgenommen, nämlich: