

Dal Quark al Quasar

Pensieri di Fisica, sulla Natura e sull'Universo

Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Sabato 26 novembre 2005

Caro Amico,

la funzione d'onda di un sistema quantistico, come abbiamo visto, ci consente, attraverso il suo modulo quadro, di calcolare la probabilità di trovare il sistema quantistico in un certo punto dello spazio piuttosto che in un altro. Naturalmente, trattandosi di probabilità, non sappiamo *se, facendo una misura*, lo troveremo qui piuttosto che là, ma sappiamo con quale probabilità esso potrà trovarsi in ogni punto dello spazio, ad ogni istante di tempo. E ancora una volta sta facendo capolino un problema: quello di fare una misura su un sistema quantistico. Ma perché mai questo dovrebbe essere un problema?

Idealmente un sistema fisico governato dalle leggi della Fisica Classica può essere sottoposto ad ogni genere di misura; sempre idealmente, possiamo immaginare di disporre di strumenti così sofisticati da misurare con precisione arbitraria le quantità fisiche di nostro interesse; e sempre idealmente, possiamo immaginare di disporre di strumenti così meravigliosamente costruiti da non perturbare il sistema fisico su cui effettuiamo la misura. In altre parole, in Fisica Classica l'osservatore che compie la misura è, idealmente, completamente esterno al sistema oggetto di studio (misurandolo non lo perturba in alcun modo) e in grado di caratterizzarlo con infinita precisione. Nel mondo reale, qualunque strumento di misura sarà dotato di una precisione limitata, e la possibilità di misurare un sistema sarà vincolata alla necessità di perturbarlo, seppur minimamente, per farlo interagire con lo strumento di misura. Tuttavia, tali limitazioni sono da imputare alle nostre limitate capacità tecnologiche, e possiamo immaginare che un continuo progresso tecnologico e un progressivo aumento delle nostre conoscenze e capacità possa costantemente perfezionare i nostri strumenti di misura, ed aumentare, col tempo, indefinitamente la precisione di misura e ridurre, col tempo, indefinitamente l'interazione dello strumento di misura col sistema stesso.

È possibile, e se sì come, adottare le stesse idee per quanto concerne la misura su un sistema quantistico? La risposta non è banale: tanto l'interazione nulla dello strumento col sistema fisico quanto l'infinita precisione della misura sono, infatti, due ipotesi che, per quanto ragionevoli possano apparirci (in un mondo ideale, naturalmente), vanno accettate con le dovute cautele: infatti, introducendo la Meccanica Quantistica, abbiamo fatto soltanto due ipotesi: che l'equazione fisica che governa i sistemi quantistici sia quella di Schrödinger, e che le sue soluzioni, le funzioni d'onda, abbiano il significato di ampiezza di probabilità di posizione. Non c'è altro. Le due ipotesi che citavamo concernenti il problema della misura sono compatibili con queste? O sono piuttosto in contraddizione con esse? Possiamo assumere che il problema della misura, in Meccanica Quantistica, sia formalmente identico che in Meccanica Classica, o assumerà risvolti differenti?

Per cercare di dare risposte a queste domande iniziamo a chiederci in quale modo possiamo collegare tutto ciò che conosciamo di un sistema quantistico, ovvero la sua funzione d'onda, con l'esito di una misura effettuata su di esso. E, per farlo, prendiamo una proprietà fisica qualunque del sistema; per non avventurarci in cose troppo esotiche che comunque nulla aggiungerebbero al discorso, diciamo che vogliamo misurare la posizione del sistema quantistico. Non preoccupiamoci per il momento di come sia fatto uno strumento di misura atto a determinare tale quantità; chiediamoci piuttosto che cosa ci dice la funzione d'onda del sistema. Già sappiamo che il suo modulo quadro in un punto dello spazio ci dà la probabilità di trovare il sistema quantistico in un volumetto infinitesimo attorno a quel punto *qualora facessimo una misura*. Orbene, la misura la stiamo facendo, e tutto ciò che la funzione d'onda sa dirci è con quale probabilità troveremo il sistema fisico in ogni punto dello spazio. Non è certo un'informazione comoda: facilmente il sistema fisico (che, non l'abbiamo detto, ma potrebbe essere il famoso elettrone dell'esperimento di Davisson e Germer, anzi di esso ci occuperemo nel seguito per praticità) può trovarsi in un'infinità di punti diversi (ovvero la sua funzione d'onda ad un certo istante di tempo è diversa da zero in un insieme infinito di punti) e l'informazione puramente probabilistica fornitaci dalla funzione d'onda è drammaticamente insufficiente; infatti, come ricorderai, l'interazione dell'elettrone con la lastra fotografica (che di fatto *ne misura* la posizione) ha un esito del tutto casuale: l'annerimento della lastra avviene in un punto scelto a caso tra quelli in cui la funzione d'onda non è nulla, con probabilità dettata dal suo modulo quadro. Eppure, se ripetiamo l'esperimento molte e molte volte, le singole macchioline

generate sulla lastra dai singoli elettroni costituiscono, un po' per volta, una figura di diffrazione ben definita.

Ripetere molte e molte volte l'esperimento può voler dire spostare l'attenzione dal comportamento del singolo elettrone al comportamento *medio* di un elettrone generico. Vorrei sottolineare che il comportamento *medio* di un sistema non coincide necessariamente con un comportamento *possibile* per un sistema. Una monetina lanciata in aria cadrà per metà delle volte (in media) su una faccia e per metà (in media) sull'altra. Se scelgo una rappresentazione fisica in cui ad una faccia assegno il valore +1 e all'altra il valore -1, *in media* il risultato del lancio di una monetina per molte volte consecutive sarà zero; e zero non è uno stato possibile per la monetina. Questa precisazione è in generale necessaria, perché ci saranno sistemi fisici in cui il valor medio di una certa proprietà sarà un valore fisicamente possibile per essa, ma ci saranno anche sistemi fisici in cui questo non sarà vero.

Come possiamo calcolare il valore medio di una grandezza fisica di un sistema quantistico usando la sua funzione d'onda che, ripetiamolo, è tutto ciò che conosciamo di esso? Sfruttando proprio il suo significato di ampiezza di probabilità. Data una qualunque grandezza fisica F (un qualunque *osservabile*, dovremmo dire), il suo *valor medio* (che indicheremo con la scrittura $\langle F \rangle$) è dato dall'espressione:

$$\langle F \rangle = \int F |\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz$$

dove l'integrale è da intendersi su tutto lo spazio (o per lo meno su tutto lo spazio dove la funzione d'onda non è nulla). Così, il valor medio della posizione del sistema quantistico sarà dato semplicemente da:

$$\langle x \rangle = \int x |\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz$$

Similmente potremo calcolare il valor medio di qualunque altra grandezza fisica del sistema. Perché abbiamo fatto questa lunga discussione sui valori medi delle grandezze fisiche misurabili di un sistema quantistico? Perché nel 1927 Ehrenfest ha enunciato un teorema che dà una prima parziale risposta alle domande che ci siamo posti all'inizio. Tale teorema asserisce che *i valori medi delle osservabili di un sistema quantistico evolvono nel tempo secondo le leggi con cui evolvono le corrispondenti grandezze classiche*. Che cosa vuol dire? Fino ad ora abbiamo considerato il mondo governato dalle leggi della Meccanica Quantistica come un qualche cosa di completamente scollegato dal mondo "macroscopico" che invece è governato dalle leggi della Meccanica Classica, ed è quello che ci appare evidente tutti i giorni sotto i nostri occhi. Il teorema di Ehrenfest stabilisce un primo legame tra il mondo quantistico e il mondo "classico": se prendo un sistema quantistico, in generale non so dire esattamente come si comporterà (posso parlare solo di probabilità, perché tale è il significato della funzione d'onda), ma posso dire che cosa farà *in media*. Orbene, *in media* le proprietà di un sistema quantistico (osservabili) evolveranno nel tempo secondo le stesse leggi con cui evolvono le corrispondenti leggi classiche. Questo teorema ha un'importanza concettuale enorme per almeno due motivi:

- la separazione tra mondo "macroscopico" governato dalle leggi della Fisica Classica e mondo "microscopico" governato dalle leggi della Fisica Quantistica è artificiosa e dettata solo dal fatto che non disponiamo di un'unica teoria fisica in grado di abbracciare in sé una descrizione unitaria (e maneggevole) dei fenomeni fisici; è quindi necessario che, in qualche modo, le due descrizioni parziali di cui disponiamo si possano collegare l'una all'altra, possibilmente senza contraddirsi;
- il collegamento tra mondo quantistico e mondo macroscopico è sempre presente quando si intende effettuare un'operazione di misura su un sistema quantistico; è infatti necessario, concettualmente, che un'operazione di misura dia un risultato *certo*; non sto dicendo (sbaglierei grandemente se lo facessi) che una misura fisica sia priva di *errore* (di *incertezza* dicono alcuni); ovvero non sto dicendo che sia concretamente possibile misurare una grandezza fisica con infinita precisione e che misure successive della stessa grandezza debbano dare sempre esattamente lo stesso risultato, senza dispersione; sto dicendo che è fondamentale che quando effettuo una misura di una proprietà fisica, il risultato che ottengo dipenda *solo* dallo stato del sistema che sto misurando, e *non dipenda* dallo stato dello strumento che utilizzo. Se per misurare una proprietà di un sistema quantistico impiegassi uno strumento il cui comportamento fosse a sua volta governato dalle leggi della Meccanica Quantistica sarei in grossi guai: non solo il sistema oggetto di studio avrebbe un comportamento di natura probabilistica, ma anche la risposta dello strumento di misura interagente col sistema quantistico in questione sarebbe di natura probabilistica; in altre parole, non potrei considerare il sistema oggetto di misura e lo strumento di mi-

sura come *indipendenti*, ma essi sarebbero un unico sistema fisico di cui dovrei scrivere un'unica equazione di Schrödinger che contenga in sé la fisica di entrambi. Si esce da questo guaio solo se il sistema di misura è "macroscopico", ovvero obbedisce alle leggi della Fisica Classica; il sistema quantistico interagirà col sistema di misura, ma questo sarà costituito da un numero molto grande di atomi, e l'interazione del sistema quantistico che sto studiando con lo strumento di misura coinvolgerà a sua volta anche un numero molto grande di atomi dello strumento stesso; *in media*, il comportamento dello strumento di misura ubbidirà allora alle leggi della Fisica Classica (anche se ogni singolo atomo di cui è costituito ubbidisce alle leggi della Meccanica Quantistica), permettendoci di conoscere il comportamento *non più probabilistico* del sistema di misura. È solo grazie a questo che possiamo misurare le proprietà di un sistema quantistico (ad esempio un atomo o un elettrone).

Ecco quindi il primo punto fermo: *per misurare le proprietà di un sistema quantistico mi serve uno strumento di misura che obbedisca alle leggi della Fisica Classica*; questo è possibile grazie al teorema di Ehrenfest. Ma non è tutto. Il teorema di Ehrenfest assicura che lo stato dello strumento di misura sia noto, ma non dice nulla, naturalmente, sullo stato del sistema fisico oggetto di studio: come sempre, l'elettrone dell'esperimento di Davisson e Germer viene misurato dalla lastra, che ne determina la posizione (l'annerimento sulla lastra coinvolge un certo numero di molecole di reagente fotosensibile, ognuna costituita da un certo numero di atomi, e benché ognuno di essi sia a sua volta un sistema quantistico, quelli coinvolti nel fenomeno sono tanti, e *in media* il comportamento è quello di un sistema classico), ma nulla possiamo dire *a priori* sulla posizione che assumerà l'elettrone sulla lastra, se non in termini probabilistici; possiamo dire che, *in media*, in un esperimento con molti elettroni, la posizione sarà data dalla formula mostrata nella pagina precedente, che nell'esempio in questione dirà, semplicemente, che *in media* gli elettroni vanno ad annerire la lastra fotografica al centro, in corrispondenza del forellino nello schermo (come farebbero dei proiettili materiali, delle palline, in un esperimento governato dalle leggi della Fisica Classica); ma questo ci è di scarso aiuto, poiché sappiamo che alcuni elettroni si localizzeranno in effetti lì, ma così non sarà per tutti. Tutto ciò che sappiamo è che, nel momento in cui un elettrone dell'esperimento di Davisson e Germer interagirà con la lastra fotografica, succederanno le seguenti cose:

- la funzione d'onda dell'elettrone collasserà in un punto: l'elettrone fino ad un istante prima *non aveva una posizione definita*, non perché essa non fosse a noi nota, ma proprio perché non l'aveva; tra le infinite posizioni possibili per l'elettrone, tutte in qualche maniera occupate da esso *simultaneamente* almeno *finché non facciamo una misura*, esso ne assumerà finalmente una, presa a caso ma compatibilmente con la probabilità dettata dal modulo quadro della funzione d'onda, solo quando interagirà finalmente con lo strumento di misura atto a misurarne la posizione (la lastra fotografica);
- la lastra fotografica, grazie al fatto che interagisce con l'elettrone attraverso molti dei suoi atomi, è assimilabile ad un sistema classico, in virtù del teorema di Ehrenfest; così lo stato del sistema di misura è noto, l'annerimento della lastra avverrà proprio là dove l'elettrone si è localizzato, collassando la sua funzione d'onda, e interagendo con le molecole dell'emulsione fotografica; non ci sono effetti probabilistici, non c'è incertezza; c'è a livello atomico, con l'interazione dell'elettrone con *ogni atomo* presente nei dintorni del punto in cui collassa la sua funzione d'onda; ma siccome gli atomi sono tanti, *in media* il comportamento finale è noto, ovvero quello di una particella che collide *in quel punto della lastra*; e infatti, la lastra si annerisce *proprio lì*.

Abbiamo fatto solo metà percorso. Abbiamo visto a quali requisiti deve obbedire un sistema di misura al fine di studiare un sistema quantistico, ma ancora non abbiamo detto che cosa questo implichi al fine del sistema quantistico stesso. Ad esempio, sempre restando nell'ambito dell'esperimento di Davisson e Germer giusto per non dover parlare troppo in astratto: sarebbe possibile misurare la posizione dell'elettrone *prima* che esso arrivi sulla lastra fotografica, magari in più punti dello spazio, così da individuarne, almeno con una certa approssimazione, la *traiettoria*? Se potessimo farlo ci toglieremmo da un grosso guaio concettuale: potremmo infatti visualizzare il percorso che l'elettrone compie fino alla fenditura, scoprire come interagisce con essa (ad esempio urtandone un bordo), e individuare la sua traiettoria (ora deviata rispetto a prima) fino alla lastra fotografica; il punto di impatto con essa sarebbe allora noto *prima* che l'elettrone la raggiunga, e il comportamento dell'elettrone sarebbe ricondotto a quello di una pallina che obbedisce alle leggi della Fisica Classica. La speranza, evidentemente, sarebbe quella di eliminare quella componente probabilistica che si trova nelle funzioni d'onda e ricondurre, almeno in linea di principio, questi fenomeni di tipo probabilistico non nella natura intrinseca delle leggi della Fisica, ma nella nostra incapacità di conoscere con sufficiente dettaglio ciò che l'elettrone fa da quando viene lanciato dalla sorgente a quando, passando in qualche modo attraverso la fenditura, raggiunge la lastra.

Sì, ma si può fare?

Ci sono due aspetti da tenere in considerazione:

- il primo di essi è di natura squisitamente concettuale; immaginiamo sempre il nostro elettrone dell'esperimento di Davisson e Germer; l'abbiamo lanciato verso lo schermo con la fenditura, e tutto ciò che sappiamo di lui è la sua funzione d'onda, soluzione dell'equazione di Schrödinger. Pertanto, ad un certo istante di tempo (diciamo che l'elettrone ancora non ha raggiunto la fenditura) sappiamo con quale probabilità esso si troverà nei vari punti dello spazio, ma nulla più. Allora decidiamo in qualche modo di misurarne la posizione (discuteremo dopo di come questo si possa fare e che cosa comporti). Immaginiamo anche che tale misura di posizione non sia distruttiva (se usassimo nuovamente una lastra fotografica assorbiremmo l'elettrone che non proseguirebbe più verso la fenditura, e il nostro esperimento sarebbe finito lì; immaginiamo di avere a disposizione un metodo che non comporti la fine dell'esperimento). Il problema concettuale è che l'elettrone, subito prima che ne misuriamo la posizione, è descritto dalla sua funzione d'onda, e *non ha una posizione definita*; poi effettuiamo la misura, e la sua funzione d'onda collassa in un certo punto dello spazio, scelto a caso rispettando le ampiezze di probabilità date dalla funzione d'onda. Quindi, una volta fatta la misura, la funzione d'onda dell'elettrone *non è più la stessa di prima*: se io non avessi fatto la misura di posizione, la sua funzione d'onda non sarebbe collassata in un punto; invece io ho fatto la misura di posizione, e ho fatto sì che la posizione dell'elettrone in quell'istante di tempo passasse da *indefinita* a *definita*. In altre parole, da quell'istante di tempo in poi, l'equazione di Schrödinger dell'elettrone *non è più quella iniziale*, perché il mio processo di misura ha introdotto al suo interno un nuovo termine di energia che descrive l'interazione d'elettrone col sistema di misura stesso. Ecco quindi il grosso problema concettuale: ogni volta che effettuiamo una misura su un sistema quantistico, *devo tenerne conto nell'equazione di Schrödinger per tutti gli istanti di tempo successivi alla misura*. Nella descrizione dell'esperimento di Davisson e Germer e nella nostra epistola sull'equazione di Schrödinger non abbiamo affrontato questo problema perché non ci siamo mai posti la domanda di quale sia la funzione d'onda dell'elettrone *dopo* che ha interagito con la lastra fotografica che ne determina la posizione. Ma qui, se desideriamo misurare la posizione dell'elettrone una o più volte *prima* che esso raggiunga la lastra fotografica dell'esperimento, *dobbiamo* inserire nell'equazione di Schrödinger *tutti* i termini di interazione tra il sistema quantistico e tutti i sistemi di misura che adottiamo. Questo fa sì che l'equazione di Schrödinger del sistema quantistico sia diversa da quella che lo governa quando non effettuiamo su di esso nessuna misura; ovvero, *non c'è modo di effettuare una misura su un sistema quantistico senza alterarlo*. L'assunto della Fisica Classica che, almeno idealmente, in linea di principio, l'osservatore possa misurare un sistema dall'esterno, senza perturbarlo, in Meccanica Quantistica non può essere valido, è in contraddizione con le due ipotesi fondamentali (equazione di Schrödinger e significato della funzione d'onda). Se decidiamo comunque di effettuare una misura sul sistema quantistico, dobbiamo accettare il fatto che essa ci darà informazioni non già sul sistema che pensavamo di studiare, ma su quello composto dal sistema in quanto tale *più* lo strumento di misura. Non posso misurare la posizione dell'elettrone dell'esperimento di Davisson e Germer *prima* che esso raggiunga la lastra fotografica, perché se lo facessi *non starei più effettuando quell'esperimento lì*, ne farei un altro, descritto da un'equazione di Schrödinger diversa, e che avrà un esito certamente diverso;
- il secondo aspetto, come accennavamo, riguarda la non distruttività della misura. Se cercassimo di misurare la posizione dell'elettrone con una lastra fotografica distruggeremo il nostro esperimento, poiché l'elettrone sarebbe catturato dalla lastra stessa ed arresterebbe in essa il suo moto. Dobbiamo quindi trovare un altro modo. Possiamo pensare ad un'infinità di tecniche diverse adatte a questo scopo, ma tutte alla fine arrivano a sollevare un problema che qui descriveremo immaginando che la misura non distruttiva (ma che modifica comunque la funzione d'onda dell'elettrone, come dicevamo prima) della posizione dell'elettrone sia fatta ad esempio con un'onda elettromagnetica. L'idea è la seguente: "illuminiamo" con un'onda elettromagnetica di una certa lunghezza d'onda la regione di spazio in cui sappiamo, grazie alla conoscenza della funzione d'onda dell'elettrone, che potremo trovare l'elettrone (questa regione di spazio potrebbe essere grande o piccola, non importa, costituisce un problema sperimentale solo in un esperimento concreto, in linea di principio possiamo immaginare di non avere difficoltà ad indirizzare l'onda elettromagnetica esattamente là dove serve). L'onda elettromagnetica interagirà con l'elettrone "misurandone" la posizione; ovvero, essa verrà in qualche modo riflessa o perturbata nel punto in cui la funzione d'onda dell'elettrone collasserà per effetto della sua interazione con l'onda elettromagnetica. Un detector opportuno sarà in grado di raccogliere l'onda elettromagnetica diffusa dall'elettrone e, analizzandola, ci darà in qualche modo le coordinate spaziali in cui si trovava l'elettrone quando ha interagito con l'onda stessa. Questa tecnica non è certo fantasiosa: è quello che fanno costantemente i nostri occhi e il nostro cervello: onde elettromagnetiche colpiscono gli oggetti che ci circondano, vengono da essi diffuse, i nostri occhi le raccolgono, il nostro cervello elabora le informazioni e ci dice dove si trovano i vari oggetti; nulla di particolarmente esoterico. Dove sta il problema? Sta nella lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica usata per misurare la posizione dell'elettrone. Pensa ad esempio di voler dire dove si trova un bicchiere su un tavolo; hai a disposizione un righello lungo un metro, senza divisioni intermedie; la tua stima della posizione del bicchiere sul tavolo sarà molto approssimativa, perché il tuo righello non ha *risoluzione* sufficiente; potrai ovviare al

problema usando un righello che abbia suddivisioni al centimetro, senz'altro più adeguato al compito, dal momento che il bicchiere avrà dimensioni certamente più grandi di un centimetro, e quindi potrà essere localizzato con una precisione sicuramente maggiore rispetto alle sue dimensioni. E per l'elettrone? Esso, a quanto ne sappiamo, è molto piccolo (così piccolo da essere, allo stato attuale delle conoscenze, addirittura *puntiforme*). Che lunghezza d'onda deve avere l'onda elettromagnetica per poterlo localizzare? Naturalmente essa potrà essere arbitraria, ma quanto più precisamente vorremo individuare la posizione dell'elettrone nello spazio, tanto più piccola dovrà essere la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica. Piccola lunghezza d'onda vuol dire grande frequenza (esse infatti sono inversamente proporzionali), e grande frequenza vuol dire elevata energia. Un'onda elettromagnetica che investe l'elettrone ne identificherà sì la posizione (con risoluzione dettata dalla sua lunghezza d'onda), ma interagendo con esso (è inevitabile, come dicevamo prima) trasferirà ad esso dell'energia, tanta di più quanto più è alta la sua frequenza, ovvero corta la sua lunghezza d'onda. Il discorso è generale, sarebbe valido anche se immaginassimo un modo diverso di misurare la posizione dell'elettrone. È come dire: in Meccanica Quantistica è falso l'assunto che io possa effettuare una misura su un sistema quantistico senza perturbarlo; inoltre, *quanto più precisamente vorrò determinare la grandezza che sto misurando, tanto più intensamente interagirò col sistema e lo perturberò.*

È una cosa di cui ci dobbiamo preoccupare? È una cosa che ha delle conseguenze? Naturalmente sì. Esse, tanto per cambiare, sono sconvolgenti, e determinano comportamenti dei sistemi quantistici assolutamente contrari a quanto ci si aspetterebbe basandosi sul senso comune, forgiato dalla Fisica Classica che governa i fenomeni macroscopici. Per arrivarci, partiamo di nuovo da qualche cosa che possiamo fare senza difficoltà in un mondo dettato dalle leggi della Fisica Classica. Immaginiamo una pallina che si muove nello spazio. Possiamo misurarne la posizione (ad esempio con un'onda elettromagnetica da essa diffusa, ovvero semplicemente "guardandola" in una stanza illuminata), e possiamo misurarne la velocità (o, in maniera equivalente, la *quantità di moto* o *impulso*, prodotto di massa e velocità), grazie al fatto che possiamo determinare di quanto varia la posizione della pallina in un intervallo prefissato di tempo. Possiamo fare queste misure tutte le volte che vogliamo, e possiamo così conoscere la *traiettoria* della pallina con infinita precisione. Il meccanismo funziona perché l'onda elettromagnetica che usiamo per misurare la posizione della pallina interagisce con essa su una scala governata dalle leggi della Meccanica Quantistica, ma la pallina è fatta da molti atomi, e *in media*, grazie al teorema di Ehrenfest, il suo comportamento sarà descritto dalle leggi della Fisica Classica. Inoltre, è vero che l'onda elettromagnetica trasferirà energia alla pallina per il fatto stesso che interagisce con essa, ma la massa e di conseguenza l'energia cinetica e l'impulso della pallina saranno talmente grandi rispetto a quelli trasferiti dall'onda elettromagnetica che possiamo trascurare completamente ogni effetto dell'interazione dell'osservatore col sistema fisico (il famoso assunto che facevamo all'inizio, ovvero il fatto che possiamo effettuare una misura su un sistema governato dalle leggi della Fisica Classica senza perturbarlo). Della pallina possiamo perciò misurare con la precisione desiderata posizione e velocità ad ogni istante di tempo, e pertanto conoscerne la traiettoria (e usare queste informazioni per comprendere la Fisica che c'è dietro, sviluppando quindi la Meccanica Classica, quella che parte dalla famosa legge di Newton $\mathbf{F}=\mathbf{ma}$).

E se al posto della pallina avessi il mio solito elettrone? In questo caso non potrei più trascurare gli effetti dell'interazione dell'onda elettromagnetica usata per determinarne la posizione sull'elettrone stesso. Ciò che la Meccanica Quantistica matematicamente dimostra è che per ogni grandezza fisica che io misuri su un sistema quantistico, ce ne sarà sempre un'altra che sarà perturbata dal processo di misura; e sarà perturbata in maniera tanto più grave quanto più precisamente avrò determinato la prima grandezza. Questa affermazione, qui riportata in maniera un po' grossolana, va sotto il nome di *principio di indeterminazione di Heisenberg*, e ci apprestiamo in queste ultime battute della nostra epistola a fornirne un'espressione un po' meglio definita. Chiamiamo x la grandezza fisica che misuriamo di un sistema quantistico (ad esempio la componente x della terna di coordinate che identificano la posizione di un elettrone). Chiamiamo Δx la precisione con cui la determiniamo (dettata ad esempio dalla risoluzione imposta dalla lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica che sto usando per misurare la posizione dell'elettrone). Ad x potrò sempre associare una quantità, denominata *impulso associato*, che chiamerò p_x , che gode con x di una particolare relazione matematica che non stiamo qui ad approfondire (ad esempio p_x sarà la componente x dell'impulso dell'elettrone). Tra la grandezza scelta e il suo impulso associato vale la seguente relazione di indeterminazione di Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

ove compare l'onnipresente *costante di Planck* e ove Δp_x indica la precisione con cui è possibile conoscere l'impulso p_x . Che cosa vuol dire? Questa relazione è una disuguaglianza: il prodotto di due quantità deve essere maggiore o uguale di una costante. Quindi, quanto più precisamente determinerò x (Δx pic-

colo), quanto meno precisamente potrò *simultaneamente* determinare p_x (Δp_x grande, per soddisfare la diseguaglianza). Vale ovviamente il viceversa: quanto più precisamente misurerò p_x , tanto meno precisamente potrò conoscere *allo stesso istante* x . Tornando al nostro elettrone: se ne misuro la posizione x con una certa precisione Δx dettata dalla lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica che uso per la misura, otterrò come effetto risultante quello di aver perturbato l'impulso (per una particella dotata di massa, come l'elettrone, possiamo tranquillamente parlare di *velocità*, fa lo stesso, almeno finché non raggiungiamo velocità relativistiche) di una quantità Δp_x che dovrà soddisfare la relazione di indeterminazione di Heisenberg. In altre parole, non posso *mai*, di un sistema quantistico, determinare con precisione arbitraria la *traiettoria*, perché il principio di indeterminazione di Heisenberg mi vieta di conoscere in un dato istante con precisione arbitraria le due componenti associate *posizione* e *velocità* (e altre ancora, di cui magari parleremo in seguito). Se, per ipotesi, io fossi in grado di conoscere con infinita precisione la posizione del mio solito elettrone ($\Delta x = 0$) perderei ogni tipo di conoscenza sul suo impulso (Δp_x tenderebbe a infinito per soddisfare la relazione di indeterminazione di Heisenberg). Parallelamente, se volessi misurare con infinita precisione l'impulso del mio solito elettrone, perderei ogni possibilità di conoscerne la posizione (Δx che tende ad infinito vorrebbe dire che l'elettrone sarebbe localizzato indifferentemente in un punto qualunque dello spazio). Tutto questo è valido se decidiamo di determinare *simultaneamente* una grandezza e il suo impulso associato. Nulla vieta, dopo che ho misurato x con precisione Δx ad un certo istante di tempo (e ho modificato la funzione d'onda del sistema, come abbiamo discusso in precedenza), di far passare un intervallo di tempo (anche infinitamente breve) e di misurare p_x con una precisione Δp_x a mia scelta (modificando nuovamente la funzione d'onda del sistema), perché in due istanti di tempo diversi varranno due relazioni di indeterminazione distinte. Nei sistemi macroscopici, quelli governati dalle leggi della Fisica Classica, è come se la costante di Planck valesse zero (ti ricordi? Ne avevamo fatto un cenno discutendo dell'equazione di Schrödinger), pertanto Δx e Δp_x possono essere simultaneamente piccoli a piacere, in accordo con gli assunti che abbiamo fatto sulle possibilità di effettuare misure su un sistema classico.

Questa lunga chiacchierata ti avrà senz'altro sconcertato sia per la difficoltà concettuale di molti dei ragionamenti che abbiamo affrontato, sia per la gran quantità di elementi e riflessioni che abbiamo introdotto. Eppure ancora non abbiamo finito: dovremo tornare, nella nostra prossima epistola, a parlare del principio di indeterminazione di Heisenberg, perché sarà grazie ad esso che potremo spiegare alcune delle affascinanti proprietà degli atomi (e dei sistemi quantistici *confinati* in genere).

A presto,

Marco