Onde elettromagnetiche

Domenica 26 ottobre 2008

Caro Amico,

il mirabile lavoro di sintesi effettuato da Maxwell con la stesura delle quattro equazioni che portano il suo nome non è solo la somma dei risultati già noti all'epoca, un'importante raccolta del sapere sull'argomento. È anche un contributo originale alla conoscenza, che non è stato solo un punto di arrivo, ma anche un punto di partenza, dal quale numerosi e fondamentali risultati saranno raggiunti nei decenni a venire. Il primo, e uno dei più influenti sul corso della scienza, della tecnologia e della società, è opera di Heinrich Rudolf Hertz. La Fisica che sta dietro la sua idea è racchiusa in quella coppia di fenomeni che abbiamo descritto a proposito della terza e quarta equazione di Maxwell: ovvero, un campo elettrico variabile nel tempo è sorgente di un campo magnetico variabile nel tempo, e un campo magnetico variabile nel tempo è sorgente di un campo elettrico variabile nel tempo.

Ma che cosa sono i campi elettrico e magnetico? Abbiamo già detto che, come tutti i campi, sono *proprietà dello spazio*. Mediante un opportuno sistema di prova (una carica elettrica, come un elettrone, per il campo elettrico, e un dipolo magnetico, o se preferisci una spira infinitesima percorsa da corrente per il campo magnetico) esploro tutti i punti dello spazio che voglio, e punto per punto misuro l'interazione del sistema di prova col vettore locale campo elettrico o magnetico; dall'insieme di queste misure, posso costruire la mappa del campo elettrico o magnetico nel volume di spazio considerato. Questo nel caso statico.

Ma se io, qui ed ora, grazie alla terza o alla quarta equazione di Maxwell, "accendo" un campo elettrico ed uno magnetico variabili nel tempo (d'ora in avanti potremo anche parlare direttamente di campo *elettromagnetico*, dal momento che nel caso non statico non esiste un campo senza l'altro), un elettrone o un dipolo magnetico che si trovano dove sei tu che valore di campo elettromagnetico rileveranno? In realtà, ci vuole del tempo perché il campo elettromagnetico che io genero qui ed ora possa giungere fino a te. Esso, infatti, si *propaga* con una velocità sì molto grande (quella della luce nel vuoto), ma finita. Solo quando sarà trascorso un tempo sufficiente, il campo elettromagnetico che ho generato io qui ed ora potrà giungere a te, e tu potrai misurarlo con il tuo elettrone o il tuo dipolo magnetico di prova. E quando giungerà a te, potrà essere distorto o attenuato, a seconda di quello che ha incontrato e ha dovuto attraversare cammin facendo.

Il caso generale, come sempre, è difficile se non impossibile da analizzare. Tuttavia, esiste un caso semplificato, che è poi quello che dobbiamo ad Hertz, al quale è in effetti possibile ricondurre, in un modo o nell'altro, anche i casi più complicati e i casi reali. Stiamo parlando del caso delle *onde piane*. Benché matematicamente il cammino che abbiamo dinnanzi non sia particolarmente complesso, come sempre sorvoleremo sugli aspetti più tecnici, concentrandoci sui risultati e sul loro significato fisico. Così, volendo porci nel contesto più semplice da affrontare, assumeremo che il campo elettromagnetico generato in un certo punto dello spazio si propaghi verso qualsiasi altro punto procedendo nel vuoto (quindi in regioni ove ci sia completa assenza di materia). Scegliamo un sistema di riferimento tale per cui il campo elettrico e il campo magnetico sono vettori che dipendono solo dal tempo t e dalla coordinata x; mettiamoci nella condizione semplificata in cui il campo $\mathbf{E}$ giace lungo la direzione z (ovvero $|\mathbf{E}| = E_z$) e il campo magnetico $\mathbf{B}$ giace lungo la direzione y (ovvero $|\mathbf{B}| = B_y$). In queste condizioni, le quattro equazioni di Maxwell:

$$div\vec{E} = 0;\ div\vec{B} = 0;\ rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};\ rot\frac{\vec{B}}{\mu_0} = \epsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

dopo un po' di passaggi algebrici che omettiamo, possono essere riscritte nella forma seguente:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}; \;\; \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

E, a questo punto, è necessario fare qualche commento:

- le ipotesi che abbiamo imposto all'inizio sono tante e all'apparenza sono molto restrittive. La domanda se le conclusioni che trarremo siano quindi interessanti e di larga applicabilità è quindi più che legittima. In realtà, non abbiamo molto di cui preoccuparci: l'aver assunto che lo spazio sia interamente *vuoto* ci pone nella più totale libertà di scegliere come orientare il sistema di coordinate cartesiane a cui fare riferimento. Poiché matematicamente si dimostra che i campi **E** e **B** sono necessariamente ortogonali tra di loro, viene facile (e non è restrittivo!) scegliere di orientarne uno lungo uno dei tre assi coordinati, e l'altro lungo un altro; la terza direzione, che qui abbiamo scelto essere la direzione *x*, vedremo risulterà automaticamente essere la direzione di *propagazione* del campo elettromagnetico;

- l'ipotesi che lo spazio sia interamente vuoto sembra a sua volta un po' tanto restrittiva: infatti, tolto lo spazio interstellare che è in buona parte abbastanza vuoto, è veramente difficile pensare che in circostanze più vicine a quelle della nostra vita di tutti i giorni tale condizione possa essere soddisfatta; in realtà, anche in questo caso non c'è necessità di allarmarsi troppo. La richiesta che lo spazio sia vuoto può tranquillamente essere rilassata con una richiesta più semplice da soddisfare, ovvero che lo spazio preso in considerazione sia pieno di un mezzo *omogeneo* e *isotropo*, ovvero che ha ovunque le stesse proprietà e le cui proprietà non cambiano a seconda della direzione in cui le osservo. Questa richiesta è *in media* vera su scale molto ampie se si considera la propagazione di un'onda elettromagnetica in un gas, in un liquido, nello spazio che separa la Terra dal nostro Sole, e così via. Anche quando questa richiesta non è pienamente soddisfatta, sarà possibile individuare regioni di spazio più piccole in cui la si può assumere per vera, e trattare il problema generale come una *sovrapposizione* di problemi più semplici, in regioni di spazio distinte, che verranno analizzati separatamente e poi ricomposti alla fine, per semplice somma;

- nel caso di spazio non vuoto, ma riempito di un mezzo omogeneo e isotropo, le equazioni di Maxwell scritte sopra, e di conseguenza anche le due espressioni da esse derivate, mutano in maniera molto semplice: al posto del simbolo ε_0 si sostituisce $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$, e al posto del simbolo μ_0 si sostituisce $\mu = \mu_r\mu_0$, ove ε_0 e μ_0 sono rispettivamente la *costante dielettrica* o *permittività* e la *permeabilità magnetica* del vuoto, mentre ε_r e μ_r sono rispettivamente la permittività e la permeabilità magnetica *relative* del mezzo che riempie lo spazio (e sono dei numeri i cui valori dipendono fortemente dal mezzo preso in considerazione).

Le due equazioni derivate da quelle di Maxwell sotto le condizioni appena discusse sono formalmente identiche, come è facile verificare (se sostituisci E_z con B_y in una, o viceversa nell'altra, ottieni l'altra equazione), e sono nella forma:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

avendo posto

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

oppure, se il mezzo in cui si propaga il campo elettromagnetico è omogeneo e isotropo ma non è vuoto,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

dove abbiamo indicato con *c* la quantità

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Anche qui è necessario fermarsi un attimo a riflettere su tutte queste formule, per non essere sopraffatti da troppi conti:

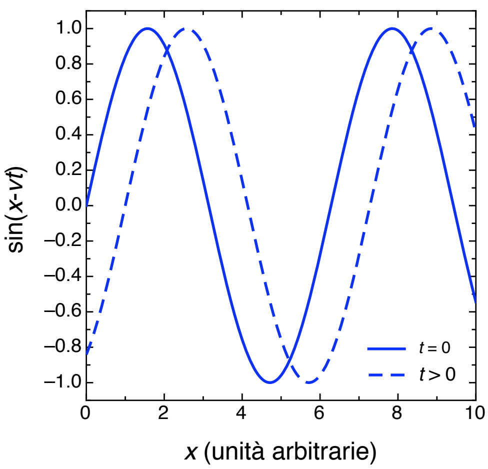
- l'equazione scritta poco sopra per la grandezza generica φ, quella che esprime in forma generale l'equazione che coinvolge E_z oppure B_y, è un tipo di equazione di cui abbiamo già avuto modo di parlare: è un'equazione *differenziale*. Essa lega il modo con cui una certa grandezza fisica (φ in questo caso, che per l'appunto può essere indifferentemente il campo elettrico E_z o il campo magnetico B_y) dipende dalla posizione dello spazio in cui vado a misurarla. L'equazione in questione, ad esempio, stabilisce un legame tra il modo con cui *varia* la grandezza φ rispetto alla coordinata *x* (poiché c'è un operatore di *derivata* -seconda- rispetto ad *x*) e il modo con cui *varia* la medesima grandezza φ rispetto al tempo *t*. Tra le nostre ipotesi vi era che tanto E_z quanto B_y dipendessero solo da *x* e da *t* e *non* da *y* o *z*, e infatti l'equazione differenziale risultante non include termini che tengano in conto le variazioni dei campi elettrico o magnetico rispetto a queste due direzioni;

- trattandosi di un'equazione differenziale, le sue soluzioni non sono numeri, ma *funzioni*; ovvero, la grandezza fisica generica φ, ovvero i campi E_z e B_y che ad essa si possono sostituire, non saranno *numeri*, ovvero non avranno un *valore* costante nello spazio, ma saranno *funzioni*. Funzioni di che cosa? Delle variabili che compaiono nell'equazione differenziale, ovviamente, ovvero di *x* e di *t*; ovvero, tanto il campo elettrico quanto il campo magnetico che si calcolano come soluzione di queste equazioni differenziali dipenderanno, ad ogni istante di tempo, dalla coordinata *x* dello spazio in cui pongo il mio elettrone o il mio dipolo magnetico di prova, e, ad ogni coordinata *x* dello spazio, dipenderanno dall'istante di tempo *t* in cui il mio elettrone o il mio dipolo magnetico di prova misureranno il valore di E_z e B_y;

- l'equazione differenziale in questione non definisce una soluzione *univoca* per la funzione φ, ma piuttosto definisce una *classe* di funzioni che sono tutte soluzioni della medesima equazione differenziale; nel caso specifico, si dimostra che la funzione φ soluzione dell'equazione differenziale precedente può assumere la forma $\varphi(x,t)=f(x-vt)+g(x+vt)$ con *f* e *g* funzioni *qualunque*, purché dipendano dalla coordinata *x* e dal tempo *t* non in maniera generica, ma in una maniera molto specifica, ovvero con la coordinata *x* e il tempo *t* legati tra di loro attraverso il parametro *v* (come definito sopra) in modo che la funzione *f* dipenda *solo* dalla differenza tra *x* e *vt* e la funzione *g* dipenda *solo* dalla somma tra *x* e *vt*.

Questo modo di trovare una soluzione all'equazione differenziale per la grandezza φ sembra un po' stravagante, e in effetti anche un po' ostico. Ma come sempre, non dobbiamo farci spaventare dalla matematica, che anzi col suo rigore ci aiuta a capire in maniera assolutamente non ambigua il significato della fisica che c'è dietro. Dicevamo che la funzione *f* può avere una forma *qualunque*; allora, poiché questa forma è generica, io scelgo una sinusoide. Perché? Perché la sinusoide è facile da disegnare e da calcolare, è un'espressione analitica semplice, e la conosciamo sia tu che io, e non ne siamo particolarmente intimoriti. Potevamo scegliere una funzione completamente diversa, anche complicatissima, ma poiché la matematica ci assicura che per la funzione *f* possiamo scegliere la forma che più ci aggrada, ecco, a me aggrada di scegliere una sinusoide. Sono sicuro che tra poco sarai soddisfatto anche tu di questa scelta.

Però, la matematica mi pone qualche vincolo; la funzione *f* non può essere banalmente una sin(*x*), perché come abbiamo visto ho dei vincoli sul modo con cui la funzione *f* deve dipendere da *x* e da *t*. Necessariamente, per me $f = \sin(x-vt)$. Bene; ma proviamo a disegnarla, questa funzione *f*. Ovviamente, nel grafico che riprodurremo, l'ordinata sarà la funzione *f* stessa, e l'ascissa sarà la coordinata *x*. La quantità *v*, per come l'abbiamo definita sopra, avrà un certo valore che ora non ci interessa, dal momento che esso è costante (la permittività e la permeabilità del vuoto sono costanti ben definite, e se il mezzo non è vuoto ma è omogeneo e isotropo ε_r e μ_r sono costanti in tutto lo spazio). E il tempo *t*? Iniziamo col porre $t = 0$ e disegnamo la funzione *f* (la curva blu continua nel grafico). Poi poniamo *t* ad un valore maggiore di zero ($t > 0$), e disegnamo di nuovo la funzione *f*: ne risulterà la curva blu tratteggiata nel grafico. Vedi la differenza? È come se la curva continua ($t = 0$) si fosse *spostata* verso destra ($t > 0$). E l'effetto è proprio questo! Dire che una funzione *f* dipen-



de da x - vt vuol dire che *qualunque sia la forma di f* (nel nostro caso una sinusoide, ma potrebbe essere una forma anche molto più complicata), al crescere di t la curva che essa definisce *si sposta* (o si *propaga*) verso destra. Qualunque sia la forma di f, anche uno sgorbio difficilissimo da disegnare, ad un certo istante di tempo nello spazio (ovvero in funzione della coordinata x) la funzione stessa individua i suoi valori nello spazio; fai trascorre un intervallo di tempo t a tuo piacere, e quei valori della funzione f si sono *spostati*, o se preferisci si sono *propagati* nello spazio nel verso delle x positive. Di quanto? Ovviamente dipende dall'intervallo di tempo t prescelto, ma dipende anche dal parametro v; adesso risulta chiaro perché abbiamo scelto di chiamarlo v: esso è una *velocità*, ovvero è la velocità alla quale si propaga nel tempo la *forma d'onda* (arbitraria, noi abbiamo scelto una sinusoide solo perché era facile da rappresentare) individuata dalla funzione f.

Un discorso perfettamente analogo si può fare per la funzione g, la cui unica differenza è che dipende non da x - vt ma da x + vt; non è difficile immaginare che l'effetto è l'esatto contrario: la forma d'onda individuata dalla funzione g non si propaga verso destra (ovvero verso le x positive), ma verso sinistra (ovvero verso le x negative). Si dice che la funzione f rappresenta un'onda *progressiva* e la funzione g un'onda *regressiva*. La funzione φ soluzione dell'equazione differenziale da cui siamo partiti, ovvero i campi elettrico e magnetico che essa va a sostituire, saranno pertanto una somma di un'onda progressiva e di un'onda regressiva.

Ecco allora che dalle equazioni di Maxwell, con qualche passaggio matematico che abbiamo saltato, e sotto condizioni certamente restrittive ma come abbiamo visto nemmeno troppo vincolanti, siamo stati capaci di scrivere un'equazione differenziale che ci ha permesso di venire a conoscenza di un fatto molto importante: se io, qui ed ora, "accendo" un campo elettromagnetico, non importa come questo sia fatto (ovvero non importa la sua *forma d'onda*, che non è assolutamente necessario che sia una sinusoide), esso si propagherà da me con una velocità v e raggiungerà ogni altro punto dello spazio traslando rigidamente questa forma d'onda al passare del tempo. Se lo spazio non è omogeneo e isotropo, tratterò ogni porzione di spazio, eventualmente anche infinitamente piccola, come una regione a sé, con proprietà (valori di ε_r e μ_r) diverse, e alla fine, quando il campo elettromagnetico giungerà a te, potrà anche essere stato deformato, attenuato o distorto, ma in ogni tratto infinitesimo del suo cammino l'equazione differenziale da cui sono partito sarà valida e potrà essere usata e risolta; ancor meglio, ovviamente, se tra me e te non ci sono variazioni del mezzo o disomogeneità, poiché l'equazione potrà essere risolta una volta per tutte per tutto il tragitto, e non solo per porzioni infinitesime di esso, da sommare (integrare) poi per ottenere la soluzione complessiva.

Il parametro v abbiamo detto essere la *velocità di propagazione* dell'onda (elettromagnetica, visto che siamo partiti dalle equazioni di Maxwell). Nel caso in cui l'onda si propaghi nel vuoto, abbiamo visto che $v = c$ e, sostituendo i valori di ε_0 e μ_0, si ottiene $v \approx 2.9979 \cdot 10^8$ m/s, ovvero circa quei trecentomila chilometri al secondo che abbiamo imparato essere la (ragguardevole, ma non infinita) velocità della luce (che, come già sappiamo, altro non è che un'onda elettromagnetica) nel vuoto. Se il mezzo in cui si propaga l'onda non è il vuoto, abbiamo visto che

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

Poiché ε_r e μ_r sono entrambi ≥ 1, ne consegue che $v \leq c$ sempre e comunque; ovvero, un'onda elettromagnetica, ivi compresa la luce, viaggerà ad una velocità *mai superiore* a quella che ha nel vuoto; qualunque mezzo, ancorché perfettamente trasparente, in virtù della sua permittività e della sua permeabilità relative che non sono mai minori di 1, lascerà che l'onda elettromagnetica si propaghi attraverso di sé ad una velocità mai più grande di c. Questo ci dice anche che è possibile "rallentare" la luce (o qualunque altra onda elettromagnetica) anche di molto, se ε_r e μ_r nel mezzo in cui avviene la propagazione sono sufficientemente grandi; ma non è possibile *fermare* la luce, poiché in nessun mezzo ε_r o μ_r diventano inifinitamente grandi (condizione perché v tenda a zero). Inoltre, poiché ε_r e μ_r solitamente dipendono dalla frequenza dell'onda elettromagnetica, una luce bianca (che come abbiamo già discusso è in realtà la sovrapposizione di tante onde elettromagnetiche a lunghezze d'onda differenti), quando percorre un mezzo con una significativa dipendenza di permittività (solitamente) o permeabilità (raramente) dalla frequenza, vedrà le sue componenti spettrali procedere a velocità diverse, a seconda della velocità v corrispondente, in quel mezzo, ad ognuna delle frequenze. Se ti ricordi, quando parlavamo della legge della rifrazione, avevamo immaginato un gruppo di uomini che correvano affiancati, sorreggendo una corda o una sbarra rigida (il fronte dell'onda), su una spiaggia; quando i primi uomini iniziavano a correre nell'acqua del mare, anziché sulla sabbia, erano costretti a rallentare, e la direzione di propagazione dell'onda cambiava, e di lì nasceva l'effetto della rifrazione. Orbene, in quell'esempio l'onda elettromagnetica era monocromatica; se invece, con un po' di sforzo di immaginazione, facciamo finta che sulla spiaggia corrano tanti gruppi di uomini, ognuno dei quali trasporta una sbarra di colore diverso (ogni componente spettrale della luce bianca), quando i primi uomini iniziano a correre in acqua (mezzo rifrangente, ovvero con ε_r e $\mu_r > 1$ e $v < c$) anziché sulla spiaggia (il vuoto, ovvero con ε_r e $\mu_r = 1$ e $v = c$), la velocità a cui vanno dipenderà dal *colore* della sbarra che stanno trasportando (ε_r e μ_r dipendono dalla *frequenza* dell'onda elettromagnetica), pertanto la deflessione (rifrazione) che l'onda elettromagnetica subirà sarà variabile a seconda del colore. È questo il meccanismo di scomposizione della luce bianca nei colori dello spettro che avviene nei prismi, come brillantemente mostrato da Newton, ma che avviene anche nelle goccioline d'acqua delle nuvole o che fluttuano per l'aria ai piedi delle cascate quando si manifesta l'arcobaleno.

L'aver capito il meccanismo con cui si propaga un campo elettromagnetico variabile nel tempo ha permezzo ad Hertz di far fare all'umanità un progresso tecnologico impressionante: poiché il meccanismo di propagazione del campo elettromagnetico nello spazio e nel tempo *non dipende* dalla forma dell'onda, io, con un opportuno congegno, posso generare campi elettromagnetici con forme d'onda sempre differenti, e queste si propagheranno sempre alla stessa maniera e giungeranno in un altro posto indipendentemente dalla forma che avevano all'inizio; in quest'altro posto potrò misurare il campo elettromagnetico, sempre col mio solito elettrone o col mio dipolo magnetico di prova, e potrò ricostruire, in funzione del tempo, la forma d'onda originale, che poteva essere un segnale in codice Morse, il suono di una voce convertito in onde elettromagnetiche, una trasmissione televisiva, il segnale digitale di un telefono cellulare o di una connessione ad Internet senza fili. Non importa la forma dell'onda che ho generato; essa si propagherà, le equazioni di Maxwell mi dicono come e mi assicurano che la forma dell'onda non è importante; l'onda arriverà a destinazione così come l'ho generata (a meno di distorsioni dovute all'aver attraversato mezzi in cui ε_r e μ_r dipendono troppo bruscamente dalla frequenza nell'intervallo di frequenze in gioco nella mia forma d'onda), dopo un tempo noto e dato dagli stessi parametri ε_r e μ_r del mezzo attraversato, e qui con un'antenna metallica (che è simultaneamente un insieme di una gran quantità di elettroni, dal momento che nei metalli ci sono tantissimi elettroni in grado di muoversi piuttosto liberamente quando sono investiti da un campo elettrico, e di dipoli magnetici per via delle correnti che si possono chiudere nella sua sezione metallica, quindi conduttrice, non nulla) posso captare l'onda elettromagnetica, processarla, e ricostruire il segnale di partenza, sia esso il ticchettio di un codice Morse, una telefonata, una trasmissione televisiva, o un qualunque segnale digitale.

Ciò che Hertz non sapeva è che l'equazione delle onde, icona di un fenomeno spiccatamente e intrinsecamente analogico (una certa grandezza φ che varia con continuità nello spazio e nel tempo), sarebbe stata ad un certo punto usata come punto di partenza per affrontare l'elettromagnetismo da un punto di vista completamente differente, diametralmente opposto: quantistico. Poiché è proprio nell'equazione delle onde che abbiamo scritto qualche pagina fa che si riconcilia l'apparente dualismo della luce: onde, come quelle che abbiamo descritto qui, ma anche particelle, quei *fotoni* di cui abbiamo già parlato in passato e di cui siamo pronti, ora, ad occuparci di nuovo.

A presto,

Marco