

# Dal Quark al Quasar

Pensieri di Fisica, sulla Natura e sull'Universo

## Il Problema dei Tre Corpi e il Caos Deterministico

Domenica 22 ottobre 2006

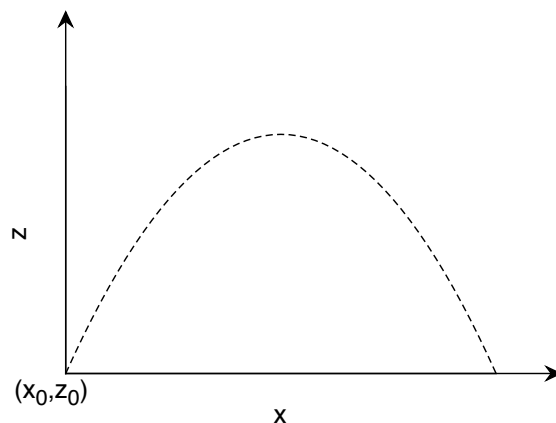
Caro Amico,

la Meccanica Analitica aveva, ed ha, tutto il sapore di un grande trionfo: da Newton in poi, tutti i passaggi evolutivi delle varie formulazioni della Meccanica hanno progressivamente affinato gli strumenti matematici atti ad estendere le classi di problemi di Meccanica analiticamente risolvibili. E in ogni caso, come più volte abbiamo ripetuto, l'insuccesso nel trovare una soluzione ad un dato problema era da ricercarsi esclusivamente nella difficoltà di calcolo, dal momento che la matematica assicurava la completa deterministicità dei sistemi studiati: date e conosciute con precisione arbitraria (eventualmente infinita) le condizioni iniziali del sistema (posizione e velocità dei suoi componenti), è possibile almeno in linea di principio calcolare con precisione arbitraria (eventualmente infinita) lo stato del sistema in qualunque istante temporale, nel futuro come nel passato.

Ma sarà proprio così?

Questa domanda l'abbiamo ripetuta talmente tante volte che la risposta parrebbe essere ovvia: no. In realtà, come spesso succede, anche la risposta ovvia non è corretta. Un bel "dipende", col carico di dubbio che porta con sé, è forse più appropriato. Cerchiamo di capire perché.

Immaginiamo di disporre di due esperimenti *identici*, o in alternativa di ripetere per due volte lo stesso esperimento in condizioni identiche. Con *identici* intendiamo che, entro i limiti della tecnologia di cui disponiamo, non siamo in grado di distinguerli l'uno dall'altro; in particolare, non siamo in grado di distinguere le loro *condizioni iniziali* (posizione e velocità di tutte le costituenti del sistema). Per fissare le idee, immaginiamo che l'esperimento consista nel lanciare una palla, secondo la traiettoria indicata nella figura qui di fianco. Il moto avviene sul piano  $xz$ , ovvero immaginiamo di lanciare la palla in avanti dandole anche una spinta verso l'alto, così che segua la ben nota traiettoria parabolica che la porterà a terra ad una certa distanza da noi.

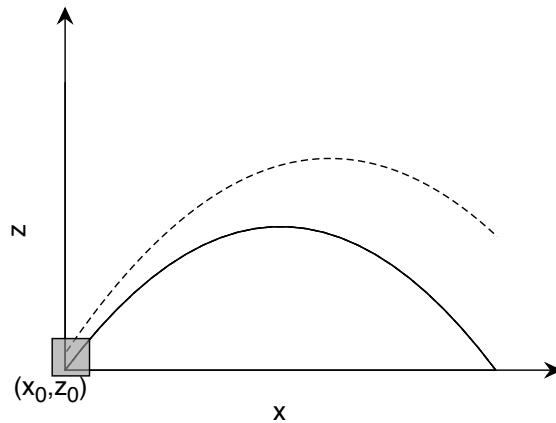


Chiamiamo  $(x_0, z_0)$  il punto da cui parte il moto; questa è solo una delle *condizioni iniziali*. Dobbiamo infatti anche precisare le componenti  $x$  e  $z$  delle velocità all'istante iniziale, così da poter stabilire in maniera univoca la traiettoria della palla. La Meccanica Analitica ci assicura che il problema è completamente risolto.

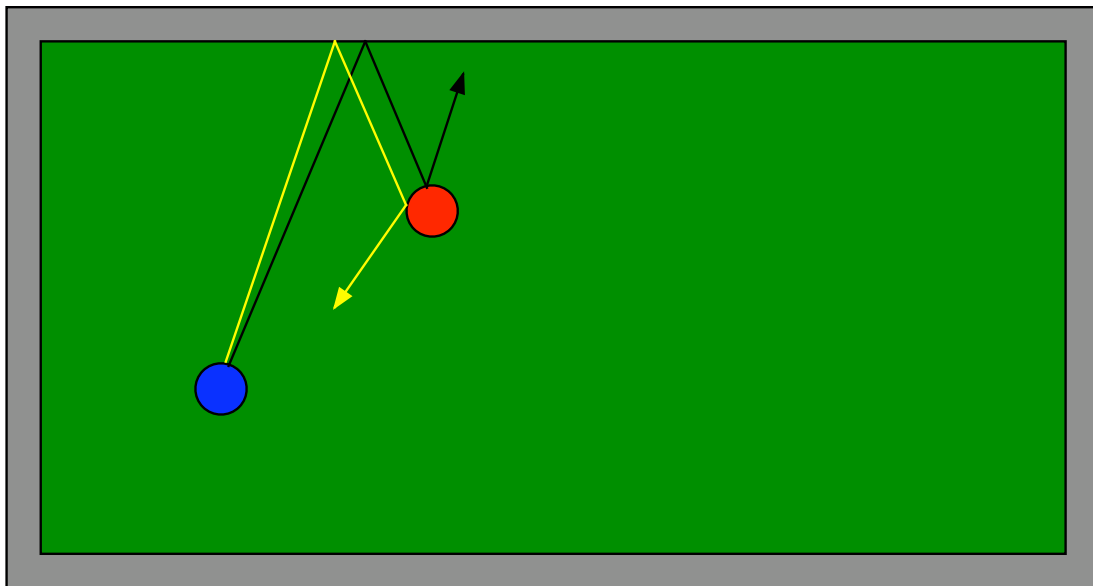
Noi, però, dicevamo di avere due esperimenti identici. Pertanto prendiamo in considerazione anche il secondo esperimento, o se preferisci eseguiamo un'altra volta questo esperimento in condizioni identiche. Naturalmente, possiamo farlo solo entro i limiti della tecnologia che abbiamo a disposizione, per cui le condizioni iniziali non saranno *esattamente* le stesse; invece, se  $(x_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{z}_0)$  sono le condizioni iniziali del primo esperimento, quelle del secondo esperimento saranno  $(x_0 + \delta_x, z_0 + \delta_z, \dot{x}_0 + \delta_{\dot{x}}, \dot{z}_0 + \delta_{\dot{z}})$  dove i vari termini correttivi avranno un segno (positivo o negativo) e un valore assoluto tali da renderli indistinguibili da zero agli occhi dei nostri strumenti di misura, ma *non saranno* in effetti nulli. È chiaro che, variando le condizioni iniziali, il moto risultante sarà diverso. Ma di quanto?

Immaginiamo che il nuovo esperimento avvenga in condizioni iniziali diverse da quelle precedenti, ma comunque indistinguibili da esse dai nostri strumenti di misura. Il caso in questione è rappresentato in quest'altra figura qui di fianco, dove l'area grigia evidenzia in maniera non molto rigorosa (l'informazione

sulle velocità iniziali è solo implicita) una regione di spazio in cui le condizioni iniziali sono diverse ma per noi indistinguibili. La linea continua rappresenta ora il primo esperimento, quella tratteggiata il secondo. Come si vede chiaramente, benché all'inizio i due esperimenti partano in condizioni per noi identiche, evolvono secondo traiettorie diverse che col tempo divergono; da un certo istante in avanti, posizione e velocità istantanee del secondo esperimento saranno sufficientemente diverse da quelle assunte al medesimo istante dal primo esperimento, e potremo distinguere i due casi l'uno dall'altro; col tempo, le due traiettorie si allontanano sempre più, e pertanto *prima o poi* saremo sicuramente in grado di distinguere i due esperimenti. Nulla di preoccupante, però: già sapevamo che le nostre conoscenze sulle condizioni iniziali degli esperimenti non erano date con infinita precisione; anzi, la separazione (misurabile) che da un certo istante in avanti si manifesta tra i due esperimenti ci permette, in linea di principio, di calcolare di quanto dovremmo migliorare le nostre capacità di misura al fine di risolvere già all'istante iniziale i due esperimenti l'uno dall'altro. La Meccanica è perfettamente *deterministica*: anche quando non conosco con infinita precisione le condizioni iniziali di un moto, posso prevedere col calcolo quanto negativamente i risultati saranno influenzati dalle mie imperfette misurazioni iniziali.



Ma purtroppo non sempre tutto va per il meglio. Immaginiamo ora che anziché lanciare una palla in aria, la lanciamo su un tavolo da biliardo. Qui, le sponde costituiscono degli ostacoli piani, altre palle (ferme) costituiscono degli ostacoli sferici (per giunta mobili, trascuriamo il fatto per ora che le palle, una volta colpite, iniziano a muoversi). Come incide in un siffatto problema l'imprecisione con cui sono conosciute le condizioni iniziali? La figura qui sotto aiuta a chiarire la questione; le traiettorie di due esperimenti iniziati in condizioni iniziali identiche (entro i limiti delle nostre capacità sperimentali) sono rappresentate da linee di colore diverso.



La palla blu viene scagliata contro una sponda in due esperimenti distinti con condizioni iniziali identiche (per le nostre capacità di misura) ma in realtà leggermente diverse; dopo l'urto con la sponda, la palla urta un'altra bocchia, quella rossa, che non essendo piana (come la sponda) ma sferica *amplifica* le differenze che c'erano in principio tra le condizioni iniziali del moto, e il risultato è che dopo l'urto la palla blu segue due traiettorie completamente diverse. Il caso rappresentato è estremo, perché le due traiettorie si separano significativamente già da subito, prima ancora di urtare la sponda, ma in realtà è sufficiente chiamare in causa anche solo 3 o 4 urti contro altrettante palle da biliardo per rendere completamente diverse e apparentemente non correlate l'una all'altra le traiettorie dei due esperimenti anche qualora le condizioni iniziali del moto differissero di quantità sorprendentemente piccole. Qui la situazione è molto più drammatica: piccole (non misurabili) differenze nelle condizioni iniziali del moto vengono amplifica-

te dal sistema stesso al punto tale che il moto del sistema diventa *impredicabile* già dopo un numero molto piccolo di urti. *Impredicabile*. Come dire *caotico*. Ma non *casuale*. La palla da biliardo non segue traiettorie casuali, perché in tutto il suo moto non ci sono mai episodi di natura stocastica (come invece ci sono in Meccanica Quantistica); la palla da biliardo segue una traiettoria *perfettamente* determinata dalle equazioni della Meccanica Analitica; nulla è lasciato al caso. Ma l'impredicibilità della sua traiettoria è dovuta ad una nostra non perfetta conoscenza delle sue condizioni iniziali. A differenza del primo esempio che abbiamo discusso, qui le piccole differenze nelle condizioni iniziali del moto possono portare a storie evolutive del sistema completamente diverse, addirittura la palla da biliardo potrebbe colpire o mancare un bersaglio o procedere in direzioni opposte in maniera apparentemente *caotica*, semplicemente ripetendo l'esperimento in condizioni *identiche* per le nostre capacità di misura.

Seppur a malincuore, possiamo cercare di convivere con questi risultati: possiamo accettare, in fondo, che non sia la Meccanica Analitica ad essere caotica, ma che il *caos* sia un risultato *apparente* dovuto alla nostra ignoranza sulle condizioni iniziali del sistema. Siamo in errore su due fronti, però: innanzitutto facciamo male ad accettare a malincuore questi risultati: lo studio della stocasticità del moto in problemi fisici siffatti ha generato intere branche della Fisica e della Matematica di una bellezza sconcertante, e ha aperto un mondo d'indagine, quello del *caos deterministico*, ricco di fascino e che forse troveremo il modo in futuro di trattare un po' meno superficialmente. E poi facciamo male a credere che la stocasticità del moto, in Meccanica, sia dovuta solo alla nostra ignoranza.

Tutto è nato dallo studio del moto dei pianeti. Così, molte migliaia di anni fa, antiche popolazioni, con le loro caste sacerdotali, cercavano di dare un ordine all'apparente caoticità dell'ambiente che li circondava, con stagioni variabili, climi impredicibili, eppure movimenti periodici, eventi che si succedono con periodicità regolarissime, ad indicare che c'è un ordine dietro la complessità del mondo che ci circonda. Da sempre, dare un ordine matematico agli eventi periodici è stato uno dei compiti principali degli astronomi e degli scienziati, e il trionfo della Meccanica Newtoniana è stato spettacolare: *tutto* era calcolabile con precisione infinita, non restava da fare altro che dotarsi di misure sufficientemente precise ed accurate. Ma qualche cosa ancora non tornava...

Allo studio del moto dei pianeti bisognava tornare. La forza di interazione gravitazionale postulata da Newton e in perfetto accordo con le meravigliose misurazioni astronomiche di Keplero dava una forma ellittica al moto dei pianeti, inclusa la Terra, attorno al Sole; e la medesima forma ellittica aveva il moto della Luna attorno alla Terra. Allora possiamo provare a risolvere le equazioni del moto del sistema composto da Sole, Terra e Luna. La sua hamiltoniana, in un sistema di coordinate cartesiane centrate sul Sole e immaginando per semplicità la coplanarità nel piano  $xy$  dei moti dei tre corpi celesti, sarà qualche cosa di simile:

$$H = \frac{p_{sole}^2}{2m_{sole}} + \frac{p_{terra}^2}{2m_{terra}} + \frac{p_{luna}^2}{2m_{luna}} + G \frac{m_{sole}m_{terra}}{(x_{terra} - x_{sole})^2 + (y_{terra} - y_{sole})^2} + G \frac{m_{sole}m_{luna}}{(x_{luna} - x_{sole})^2 + (y_{luna} - y_{sole})^2} + G \frac{m_{terra}m_{luna}}{(x_{luna} - x_{terra})^2 + (y_{luna} - y_{terra})^2}$$

dove  $G$  è la costante di accoppiamento gravitazionale. Questa hamiltoniana è lunga perché contiene tre termini di energia cinetica (per Sole, Terra e Luna rispettivamente) e tre termini di interazione gravitazionale (tra ciascuna delle tre coppie di corpi celesti), ma non è apparentemente più complicata di quella riguardante ad esempio due soli corpi celesti (Sole e Terra, per dirla due a caso), identica alla precedente ma senza il terzo termine di energia cinetica (quello relativo alla Luna) e gli ultimi due termini di energia potenziale (che riguardano l'interazione tra la Luna e il Sole e la Terra rispettivamente). Eppure, gli sforzi di generazioni di matematici e fisici sono naufragati nel tentativo di dare una soluzione analitica alle equazioni del moto del *problema dei tre corpi* (ovvero tre corpi in interazione reciproca l'uno con l'altro, come nel caso di tre pianeti), finché Henri Poincaré gettò una secchiata d'acqua gelata su tutti stabilendo che *non era possibile* trovare soluzioni analitiche al problema (salvo casi molto speciali). In altre parole: le traiettorie di tre corpi celesti (o tre corpi qualunque) in interazione l'uno con l'altro *non sono calcolabili* in maniera esatta. Il moto dei tre corpi è perfettamente deterministico, poiché le equazioni del moto non contengono nessun termine stocastico, ma non sappiamo esprimere la loro traiettoria con una *funzione*, siamo costretti a ricorrere a soluzioni approssimate. E siccome, per forza di cose, la conoscenza che abbiamo delle condizioni iniziali del moto dei tre corpi è solo approssimata, e siccome ogni problema di interazione di un corpo con un altro è essenzialmente un problema d'urto (un po' come nel caso delle

palle da biliardo) in cui gli effetti dell'imprecisione della conoscenza delle condizioni iniziali vengono amplificati, e siccome pure le soluzioni delle equazioni del moto sono note solo in maniera approssimata, il risultato finale è che ai nostri occhi il moto dei costituenti di un *qualunque* problema a 3 corpi in interazione (i corpi ovviamente possono essere anche di più) sarà *sempre* caotico, per lo meno su tempi sufficientemente lunghi, quando l'imprecisione con cui conosciamo le costanti iniziali del moto darà inevitabilmente luogo a traiettorie osservate che divergono.

Le conseguenze di questa affermazione, dimostrata matematicamente come solo personaggi della levatura di Poincaré hanno saputo fare, sono assolutamente devastanti:

- la stocasticità delle traiettorie di un sistema dinamico è essenzialmente un fatto *inevitabile* ogni volta che tale sistema è costituito da *almeno* 3 costituenti (quindi quasi sempre);
- la predicibilità di un sistema dinamico con almeno 3 costituenti è possibile solo entro intervalli temporali *finiti*, tanto più lunghi quanto più sono accurate le nostre misure delle condizioni iniziali e quanto più è accurata la descrizione formale del sistema;
- il miglioramento delle nostre capacità di misura e di calcolo, anche qualora non si dovesse scontrare con altri limiti fisici o concettuali (e oggi che conosciamo la Meccanica Quantistica sappiamo che di limiti ce ne sono), non potrà *mai* cancellare la stocasticità intrinseca di un sistema meccanico di almeno 3 corpi interagenti, benché *nulla* nelle equazioni del moto introduca elementi dinamici casuali.

Se Newton e Lagrange lo sapessero, si dispererebbero.

E farebbero male: un sistema dinamico assolutamente deterministico ma anche caotico, come questi qui sommariamente descritti, vanta una ricchezza di strutture e di rappresentazioni e di comportamenti che ancora oggi sono solo sommariamente compresi. Ma di questi, e della loro sconfinata bellezza, parleremo un'altra volta.

A presto,

Marco