Il Principio di Minima Azione

Martedì 8 agosto 2006

Caro Amico,

la formulazione hamiltoniana della Meccanica ci ha dato grandi soddisfazioni, perché è quella che maggiormente semplifica il problema matematico della risoluzione delle equazioni del moto, dal momento che esse sono del primo ordine. Inoltre, come abbiamo visto, l'uso dell'hamiltoniana in luogo della lagrangiana soddisfa il nostro senso fisico, poiché siamo in grado di dare alla prima un significato fisico (quello di energia totale del sistema) che non possiamo dare alla seconda. Il nostro amico Lagrange, però, se ne avrebbe a male se liquidassimo così, con due parole, la funzione che prende il suo nome, poiché c'è dell'altro, che all'epoca non abbiamo detto; ma è giunta ora di porvi rimedio.

Il concetto di *derivata* di una funzione ti è noto e chiaro: data una certa funzione $f(x)$, chiamiamo *differenziale* di f in x la quantità $df=f'(x)dx$ ovvero la *variazione* di f dal valore che assume nel punto x quando l'argomento viene *incrementato* di una quantità (infinitesima) dx. Tale variazione, rapportata all'incremento della variabile, assume il nome di *derivata* f' di f nel punto x. In matematica, si sa, è difficile che una buona idea resti lì senza essere utleriormente sviluppata, e nel corso del tempo il concetto di differenziale di una funzione è stato esteso, e quello che ti è noto come il *calcolo differenziale* è stato generalizzato in quello che va sotto il nome di *calcolo variazionale*. Non ci occuperemo qui di esso, dovremmo divagare in troppa matematica, ma dobbiamo dargli un cenno per capire il ruolo che la funzione di Lagrange assume nell'ambito della Meccanica Analitica.

Iniziamo con qualche definizione: ti chiederò di pazientare e di prenderle per buone, per il momento sembreranno solo definizioni arbitrarie e pure ostiche. Sotto opportune condizioni, che qui non elenchiamo, chiamiamo *funzionale d'azione* il seguente integrale:

$$\phi_L\left(q^i(t)\right)=\int_{t_1}^{t_2} L\left(t, q^i(t), \dot{q}^i(t)\right) dt$$

Al momento la funzione L non è meglio specificata (ma il fatto che abbiamo usato lo stesso simbolo che impieghiamo per la lagrangiana ci suggerisce dove andremo a parare), ma essa è funzione del tempo, sia esplicitamente, sia attraverso delle *coordinate* q (l'indice i ad apice segnala che esse possono essere più d'una), sia attraverso delle *velocità* $\dot{q}^i=\dfrac{dq^i}{dt}$. L'integrale Φ_L prende il nome di *azione*.

Cerchiamo di comprenderne il significato, almeno intuitivamente, con un esempio che conosciamo benissimo. Facciamo finta che la funzione L sia una grandezza fisica a noi familiare, ad esempio la velocità di un moto rettilineo uniforme v_x. Essendo il moto rettilineo e uniforme, tale velocità sarà costante nel tempo (quindi non dipenderà esplicitamente da t), ma non dipenderà naturalmente nemmeno dalla coordinata x perché, naturalmente, la velocità del nostro sistema sarà, per definizione, sempre la stessa, ovunque si trovi. Come ben sai, l'integrale di una velocità nel tempo dà uno spazio, pertanto

$$x(t_2)-x(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} v_x dt$$

sarà lo spazio percorso dal sistema nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2. Per comprendere il concetto di *funzionale* immaginiamo di mantenere *fissi* gli estremi del moto, ovvero $x(t_2)$ (il punto finale) e $x(t_1)$ (il punto iniziale); è come dire che immaginiamo che il nostro sistema si muova da una posizione iniziale (casa mia) ad una posizione finale (casa tua) che sono fisse, non cambiano mai. Ma ora facciamo in modo che il sistema possa percorrere tragitti diversi. Le condizioni sono tali per cui all'istante t_1 il sistema si trova a casa mia, e all'istante t_2 si trova a casa tua, ma il percorso che fa nel mezzo può *variare*. Quanta strada percorre il sistema da casa mia a casa tua? Dobbiamo in qualche maniera generalizzare l'integrale precedente, ovvero dovremo dare a v_x una dipendenza funzionale da una qualche coordinata che descriva la traiettoria che il sistema compie tra il punto da cui inizia il moto al punto in cui finisce (stiamo dando una *metrica* allo *spazio* in cui avviene il moto del sistema). Non faremo tutto questo matematicamente, ma è evidente che se per andare da casa mia a casa tua si fa una strada abbastanza dritta si percorrerà una distanza più breve rispetto ad una che passa per mezza Europa. Qui, ripeto, non è importante a quale velocità si compie il tragitto, assumiamo che ci voglia sempre lo stesso tempo. Quello che ci interessa è lo spazio percorso. Matematicamente, possiamo trovare un modo per parametrizzare la *variazione dello spazio percorso* attraverso la *variazione della strada* scelta per andare dal punto di partenza al punto di arrivo, che sono sempre fissi. Ecco, stiamo facendo del *calcolo variazionale*. Un numero reale (lo spazio percorso) viene associato all'integrale di una funzione che dipende dal tempo ma anche dalle coordinate (se il moto è vario, anziché uniforme, ci saranno pure le velocità). La *variazione* di questo numero reale, che chiamiamo *azione*, è legata alla variazione delle coordinate da cui dipende la funzione, mantenendo fissi gli estremi.

Si dimostra che le funzioni $q^i(t)$ per le quali la *variazione* dell'azione (a estremi fissi) è *nulla* sono tutte e sole le soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange posta L come la lagrangiana del sistema. Questo risultato prende il nome di *principio di minima azione* o *principio dell'azione stazionaria*. Rivediamolo per bene.

Abbiamo un sistema fisico. Scegliamo, per descriverne il moto, una funzione che chiamiamo L. Solo se L è la lagrangiana del sistema, le coordinate $q^i(t)$ rappresenteranno il moto del sistema, in quanto soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange, e saranno quelle tali per cui l'integrale dell'*azione* sarà minimo. Messa così, non sembra niente di particolarmente interessante. Però possiamo riconsiderare la questione sotto un differente punto di vista. L'impostazione lagrangiana della Meccanica parte da due ipotesi: la funzione lagrangiana, e la forma delle euqazioni di Eulero-Lagrange. Sotto queste due ipotesi, il moto di un sistema fisico può essere compiutamente descritto. C'è un livello di arbitrarietà in entrambe, e le si accetta semplicemente perché esse sono compatibili con i risultati sperimentali. Tuttavia, il principio di minima azione ci permette di modificare queste due ipotesi con altre due. Quella dell'esistenza della lagrangiana, in realtà, resta sempre lei, ma sostituiamo quella riguardante la forma delle equazioni di Eulero-Lagrange col principio di minima azione stesso, dicendo che a governare il moto di un sistema fisico c'è un calcolo variazionale che realizza il *minimo* di un certo funzionale in cui compare la funzione di Lagrange. Dal momento che la matematica ci assicura che l'*unico* modo per minimizzare l'azione realizzata con una lagrangiana è individuare le coordinate e le velocità come soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange, siamo sicuri, grazie alla concordanza coi risultati sperimentali, di aver non solo descritto il moto del sistema, ma di aver correttamente fondato la nostra Meccanica.

C'è una componente estetica in tutto questo, ed è la soddisfazione di aver tolto un'ipotesi decisamente *ad hoc* (la forma delle equazioni di Eulero-Lagrange) e di averla fatta diventare un teorema, grazie all'introduzione di un'*altra* ipotesi, il principio di minima azione per l'appunto, che ha il pregio di essere più generale. È difficile *spiegare* la bellezza, è una cosa che si percepisce; c'è un che di bello in un principio che ricerca un estremo (un minimo in questo caso) di un funzionale, e da questo scaturisce, spontaneamente ed automaticamente, un'intera teoria fisica. C'è un che di bello, in questo principio di minima azione, perché esso rappresenta non già un'ipotesi alternativa ma altrettanto *ad hoc* a quella delle equazioni di Eulero-Lagrange, ma qualche cosa di più vasto, di più generale. Parlavamo della traiettoria da casa mia a casa tua, dicevamo che possiamo percorrere strade diverse, e che esse differiscono per la lunghezza, per la distanza. Non era un esempio preso a caso; opportunamente formulato, il problema, formalmente analogo al principio di minima azione, permette di stabilire che la strada *più corta* (ovvero di lunghezza *minima*) che connette casa mia a casa tua è quella che corre dritta senza svoltare mai. In Geometria, diremmo che la distanza minima tra due punti è realizzata dal segmento di retta che li congiunge. Tuttavia, per andare da casa mia a casa tua non è detto che possiamo andare sempre e solo dritto. Ci sono dei *vincoli*, ostacoli naturali come fiumi o monti, o artificiali come come case o ferrovie, ai quali in un modo o nell'altro ci dobbiamo adattare. Una formulazione opportuna del problema che descrive la strada che congiunge casa mia a casa tua può tenere conto di questi vincoli in maniera tale da includerli nella geometria dello spazio in cui giacciono *tutte* le possibili strade che congiungono casa mia a casa tua. Il principio fondante, se la formulazione matematica è opportuna, assicura che si possa calcolare la traiettoria di lunghezza *minima* che io posso percorrere per venirti a trovare, tenendo conto di tutti i vincoli imposti. Il bello è che se io posso scegliere di percorrere *anche* una strada più lunga di quella di lunghezza minima, ma la Natura, nella forma della Meccanica, sceglie *solo e sempre* la traiettoria di *azione minima*, per i suoi sistemi. È intrigante: ho un sistema fisico, ho dei vincoli da soddisfare, e delle forze a cui esso viene sottoposto. Come si muoverà? Quale traiettoria percorrerà? Di tutte le infinite traiettorie *possibili*, sappiamo per esperienza che solo *una* verrà percorsa dal sistema (quella compatibile con le equazioni del moto). Ma *qual* è questa traiettoria? Non è una qualunque, non è una priva di caratteristiche particolari. È quella, l'*unica*, che *minimizza l'azione*. Affascinante, non c'è che dire.

La questione si complica, e si fa sempre più interessante, quando andiamo a scavare un po' più in profondità. Torniamo all'esempio di dover andare da casa mia a casa tua. Abbiamo assunto, come in genere facciamo, che la Terra sia piatta. Ma così non è, e se ad esempio io stessi in Italia e tu stessi in Canada la questione di *come* giungere da casa mia a casa tua sarebbe particolarmente importante; perché la Terra non è piatta, e il concetto di "strada tutta diritta" va opportunamente ridefinito. Il *vincolo*, in questo caso, di non poter abbandonare la superficie terrestre (ad esempio scavando un tunnel attraverso la crosta e il mantello terrestri per sbucare a casa tua in Canada) deforma la geometria del problema, da piatta (euclidea) a sferica (stiamo assumendo, per semplicità, che la Terra sia una sfera). E pur tuttavia, la formulazione matematica sufficientemente generale del problema ci assicura che possiamo sempre calcolare la traiettora di lunghezza *minima* anche in questo caso. Il problema, noto come problema di determinazione delle *geodetiche*, rivela che la traiettoria più breve che collega due punti posti su una superficie sferica (casa mia in Italia e casa tua in Canada) è l'arco di circonferenza con centro nel centro della sfera stessa e che passa per i due punti (e che è sottesto da un angolo minore di 180°). Il segmento di retta che rappresentava la geodetica (linea di lunghezza *minima*) in una geometria piana, è diventato un arco di circonferenza in una geometria sferica (stiamo iniziando ad occuparci di geometrie non euclidee, per inciso). Tutto questo senza aver modificato la formulazione matematica del problema, semplicemente avendone modificato la geometria per effetto dei vincoli. Ecco perché il principio di minima azione è così affascinante. Non importa quale sia il sistema fisico, non importa quali siano i vincoli, non importa quali siano le forze a cui è sottoposto, non importa quale sia e quanto complicata sia la geometria risultante del problema; il moto del sistema avviene *sempre* lungo la traiettoria che *minimizza* l'azione, purché essa sia data dalla lagrangiana del sistema. Non mancano i collegamenti con la Teoria Generale della Relatività, come forse avrai intuito dalla nostra prima divagazione sulle geometrie non euclidee, e per la quale ti chiederò di aspettare una nostra prossima epistola, ma nemmeno con la Meccanica Quantistica. Non è un caso, infatti, che la famosa *costante di Planck h* sia anche detta *quanto d'azione* (e in effetti le sue dimensioni fisiche sono quelle di un'azione). Perché?

La Meccanica Classica, nella sua formulazione lagrangiana, assicura che un dato sistema fisico evolverà nel tempo secondo una traiettoria che minimizza l'azione. Nulla dice, però, su quanto debba valere questa azione. Essa sarà *minima*, ma il suo valore dipenderà da sistema a sistema. Esso sarà il valore minimo possibile per quel sistema, che sarà in generale maggiore di zero (il caso banale di azione uguale a zero corrisponde al problema, assai poco interessante, di un sistema di cui si studia l'evoluzione per un tempo nullo o per un tempo indefinito ma il sistema stesso ha energia nulla, quindi di fatto non evolve). La Meccanica Quantistica, tramite il quanto d'azione *h*, dice invece qualche cosa di diverso: un sistema fisico che ubbidisca alle leggi della Meccanica Quantistica evolve secondo l'equazione di Schrödinger in modo tale da minimizzare anch'esso l'azione associata. Ma essa non può assumere un valore qualunque, può assumere solo valori che siano *multipli interi* della costante di Planck. Se il problema di andare da casa mia a casa tua fosse un problema quantistico, lo spazio non sarebbe percorso da *infinite* traiettorie (di cui una di lunghezza minima, la *geodetica*) aventi lunghezze che differisono, l'una dall'adiacente, solo per differenze o variazioni *infinitesime*, ma sarebbe percorso da un numero *forse* anche infinito di traiettorie aventi lunghezze che differisono, l'una dall'adiacente, di quantità *finite*, in qualche modo legate alla costante di Planck. Il problema di andare da casa mia a casa tua non è un problema quantistico solo perché il sistema fisico oggetto di studio realizza un'azione (minima) enormemente più grande del quanto d'azione *h*, rendendo di fatto impercettibile, ai nostri occhi di sperimentatori rozzi, la quantizzazione delle traiettorie disponibili. Così non è in sistemi realmente quantistici. In un atomo, l'elettrone che orbita attorno al nucleo è ben lungi dal poter seguire una qualunque traiettoria, ma è invece vincolato ad occupare orbite ben definite, e spesso separate le une dalle altre, proprio in virtù del fatto che le grandezze fisiche fondamentali associate al problema, come l'energia, l'impulso, il momento angolare, sono *quantizzate*, ovvero non possono variare con continuità, ma solo attraverso salti discreti legati sempre al solito quanto d'azione, alla solita costante di Planck.

Ecco: un sistema fisico è descritto da una lagrangiana, in uno spazio la cui metrica tiene conto dei vincoli. Il moto del sistema, la sua evoluzione temporale, avviene lungo l'unica traiettoria, tra le infinite possibili, che minimizza l'azione. Essa è completamente e perfettamente determinata, in ogni istante di tempo nel passato e nel futuro, semplicemente conoscendo con infinita precisione le condizioni iniziali del moto, posizione e velocità. Non c'è dubbio, non c'è arbitrarietà, non c'è casualità. Ma sarà proprio così?

A presto,

Marco