Meccanica newtoniana

Domenica 2 aprile 2006

Caro Amico,

lo studio del moto dei corpi, soprattutto di quelli celesti, è stato il primo capitolo della Fisica fin dalla notte dei tempi. Persino un po' paradossalmente: prendere un oggetto materiale in mano e studiarne le condizioni e i presupposti del moto in condizioni sperimentali controllate sembrerebbe molto più semplice che non attendere mesi, anni, secoli perché i moti celesti si rivelino all'osservatore costretto a sperare in una notte limpida per misurare le posizioni relative degli astri, senza alcuna possibilità di controllare l'esperimento, di indirizzarlo altrove. Eppure, lo studio dei moti celesti, con la sua regolarità, con la sua apparente perfezione, e con l'alone di mistero sempre molto utile per costruire una religione e una casta di sacerdoti che abbiano il controllo della società, offre molti vantaggi all'indagine fisica scarsamente dotata di strumenti; oggi, a ragion veduta, diremmo che i moti celesti avvengono in condizioni molto particolari e favorevoli allo studio sperimentale, all'interno di soli campi gravitazionali, senza attriti, ma millenni fa questo ovviamente non lo si sapeva; e la regolarità e perfezione del moto (quasi) circolare degli astri sembrava qualche cosa di molto più facilmente indagabile (e più "divino") del moto vario, accidentato, scarsamente riproducibile di qualunque grave che potesse essere spostato, gettato o lanciato da uno sperimentatore terrestre. Ragione per cui oltre 2300 anni fa uno dei più grandi filosofi della storia dell'Umanità, Aristotele, ha sistematizzato e formalizzato l'insieme delle conoscenze fisiche dell'epoca, per lo meno di quelle note nel mondo del Mediterraneo, scandendo una divisione che sarebbe rimasta inalterata per circa 2000 anni: quella tra la *Fisica celeste* e la *Fisica terrestre* (o *sublunare*). Distinzione che oggi noi respingiamo, ma che all'epoca ben mostrava la natura *perfetta* dei moti degli astri, e la natura *accidentale*, da leggersi come *fortemente influenzata da molte cause diverse spesso fuori controllo diretto*, del moto dei corpi materiali che si possono trovare sulla Terra. Distinzione che purtroppo, in un impeto di assolutismo culturale tipico di molte religioni, è diventata dogmatica quando la Chiesa cattolica ha sostanzialmente adottato l'aristotelismo per la sua descrizione fisica dell'Universo, riducendolo non già all'analisi critica, seria ed approfondita che un illustre pensatore aveva saputo dare nel suo tempo ai suoi contemporanei, ma ad un insieme di rigidi schemi mentali uscendo dai quali, anche molti secoli dopo, si cadeva nell'eresia, e quindi nella morte.

Ci voleva un gran coraggio per ridare ad Aristotele la sua dignità; e questo coraggio l'ebbe Galileo Galilei, che seppe ammirare Aristotele per la sua grandezza, e riconoscerne l'autonomia intellettuale rimproverando gli "aristotelici" di non seguire il loro maestro, promotore di un libero pensiero critico di osservazione dei fenomeni naturali, soffocandosi invece nel rigido dogma di una religione assolutista che impediva loro di aprire gli occhi verso la meravigliosa realtà che poteva svelare la Fisica del tempo. Galileo avrebbe pagato carissimo questo suo coraggio, con la prigionia, la tortura, la costrizione ad un'abiura, ma intanto il mondo andava avanti.

Tycho Brahe prima, e Johannes Kepler (contemporaneo di Galileo) subito dopo stavano letteralmente preparando una rivoluzione astronomica: da secoli, millenni si conoscevano tavole celesti che permettevano di prevedere un po' di tutto, dalle eclissi alle posizioni dei pianeti, con una precisione stupefacente. Ma Tycho Brahe, con le sue osservazioni minuziose di qualità mai raggiunta in precedenza, e Kepler, con la sua abilità matematica pari solo alla sua cocciutaggine mistica (Kepler ricercava la perfezione nelle sue osservazioni astronomiche, e nell'analisi matematica dei risultati, nel tentativo mistico di dimostrare con assoluta precisione certe perfezioni numeriche e metafisiche in quella che secondo lui doveva essere la struttura dell'Universo), avrebbero fornito proprio negli anni in cui Galileo si faceva promotore di una nuova Fisica osservativa, fatta col cannocchiale e con gli orologi ad acqua e i regoli e il calcolo, i dati su cui Newton avrebbe cosrtuito l'impalcatura formale, che sopravvive ancora oggi, della *Meccanica*.

L'opera di Galileo è ancora più meritoria se si considerano non solo il contesto politico in cui si è trovato a lavorare (e si è trovato perseguitato), ma anche gli strumenti matematici che aveva a disposizione, con una Fisica interamente geometrica in cui il solo rapporto tra grandezze omogenee era concepito (il concetto di velocità, ad esempio, come rapporto tra grandezze disomogenee, spazio e tempo, richiedeva complessi contorsionismi mentali per poter essere propriamente formulato con strumenti concettuali tanto "arretrati"). Eppure Galileo già aveva compreso quelle che, di lì a pochi anni, sarebbero state formulate da Newton come le prime due leggi della Dinamica. Va detto che Newton, pur col suo carattere impossibile, ci ha messo del suo: non solo ha saputo approfittare della rivoluzione introdotta da Descartes (Cartesio), con l'algebrizzazione della geometria (facendo crollare d'un colpo i limiti degli strumenti concettuali geometrici che usava Galileo), ma in competizione (non sempre molto corretta) con Leibniz ha formulato le fondamenta del calcolo differenziale (anche se le notazioni che ancora oggi usiamo sono quelle elaborate da Leibniz, mentre del formalismo sviluppato da Newton non resta quasi nulla nell'uso), che avrebbe costituito la base matematica per la formulazione della nuova Meccanica, che sarebbe cresciuta nel Settecento e nell'Ottocento, con le formulazioni lagrangiana e hamiltoniana, di cui ci occuperemo presto, fino a culminare nei lavori dei grandi matematici dell'Ottocento, fino a Poincaré, fino ad Einstein… ma stiamo correndo troppo.

Newton elabora i fondamenti della Meccanica secondo tre leggi, principi fisici fondamentali non dimostrati ma assunti per veri per via della loro concordanza con l'osservazione sperimentale. Sono note a tutti, ma giova qui richiamarle, non per ricordarle, ma per capirne fino in fondo la portata.

- *Ogni corpo che non sia soggetto a forze esterne persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme*. Questa affermazione, di per sé, è già una rivoluzione. Aristotele aveva formulato una profonda distinzione tra la Fisica celeste, in cui gli astri si muovevano perennemente di moto circolare (o con composizioni di moti circolari, come sempre più spesso si accettava nei secoli successivi, fino a Tycho Brahe), mossi con qualche meccanismo da un *primo mobile* (subito preso, e frainteso, dalla Chiesa cattolica, come espressione astronomica della divinità), e la Fisica terrestre, in cui i corpi tendevano verso l'alto o verso il basso (a seconda della loro leggerezza o pesantezza), ma giunti nel loro *luogo naturale* tendevano alla quiete; e in effetti, apparentemente, un sasso scagliato con forza precipita al suolo, rotola per un po', e poi si ferma. Newton, riprendendo in realtà quanto già espresso con meno chiarezza e meno rigore formale da Galileo, spazza d'un colpo tutto questo; niente più distinzione tra Fisica celeste e Fisica terrestre, *tutti* i corpi sono soggetti alle stesse leggi meccaniche; e le leggi meccaniche non parlano di moti circolari, di *luoghi naturali* e di tendenza verso di essi, salvo poi raggiungere la quiete. Un corpo, ovunque sia, qualunque sia, se è fermo resta fermo, se è in moto *rettilineo uniforme* lo mantiene, *a meno che* non si agisca su di esso con una forza. Ovvero: *per cambiare lo stato di moto di un corpo occorre agire su di esso con una forza*. Punto. I corpi celesti percorrono traiettorie circolari o ellittiche? Quindi, non essendo fermi e non essendo il loro moto rettilineo uniforme, su di essi agiscono delle forze. Un sasso scagliato precipita verso il suolo con un moto chiaramente non rettilineo uniforme? Quindi su di esso agisce una forza che lo attira verso il suolo. Quando inizia a rotolare rallenta fino a fermarsi? Quindi su di esso agisce una forza che lo porta ad arrestarsi. Nulla sappiamo, a questo stadio, su queste forze, che possono essere di natura diversa, avere origini diverse; ma qualunque sia la loro causa o la loro fonte, una forza fa sempre la stessa cosa: modifica lo stato di moto di un corpo.

- La legge con cui una forza modifica lo stato di moto di un corpo è la famosissima *seconda legge della Dinamica*, che si contende con la formula di Einstein sul legame tra massa ed energia il primato della formula fisica più famosa: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Ovvero: *una forza agente su un corpo ne perturba il moto determinandone un'accelerazione*, avente la stessa direzione e lo stesso verso della forza applicata, *proporzionale alla massa del corpo stesso*. La prima legge, di cui abbiamo appena discusso, se vogliamo è un caso particolare di questa: forza uguale a zero vuol dire accelerazione uguale a zero; e quindi, un corpo fermo resta fermo, un corpo in moto rettilineo uniforme mantiene il suo moto rettilineo uniforme, perché esso non è accelerato. Ma questa seconda legge è estremamente più incisiva. Innanzitutto stabilisce la natura *vettoriale* delle grandezze *forza* e *accelerazione* (che noi, con una convenzione tipografica comune, abbiamo evidenziato con un carattere in grassetto): ovvero forze, e accelerazioni, sono caratterizzate non solo da un'intensità (che chiameremo anche il loro *modulo*), ma da una direzione e da un verso, e naturalmente da un punto di applicazione (il centro di massa del corpo che stiamo esaminando, ad esempio). Poi assegna alla *massa* un ruolo assolutamente speciale: l'*unico* motivo per cui agendo con una forza su un corpo ne posso modificare lo stato di moto è perché esso ha una massa. Un corpo che, per ipotesi, avesse *massa nulla non potrebbe mai essere accelerato*. Poco male: non esiste niente che abbia massa nulla. O forse sì: alcune particelle elementari hanno massa nulla, tra cui i nostri vecchi amici *fotoni*. I quali sfuggono dalla comprensione fisica che può dare la Meccanica, almeno fino a che, con le equazioni di Maxwell prima e con la Relatività Generale poi, non riusciremo a costruire un quadro interpretativo più completo. Ma quello della *massa* è un grosso problema anche da un altro punto di vista: la seconda legge della Dinamica, detta anche *legge di Newton*, riguarda quella che propriamente dovremmo chiamare *massa inerziale*, ovvero quella che lega i concetti di forza e di accelerazione, e che ci dà la percezione sensoriale dell'*inerzia* di un corpo (quanto più è "pesante" un corpo, tanto più dovrò agire con "forza" se vorrò accelerarlo o frenarlo in misura per me soddisfacente). Ma questa massa *inerziale* come è legata alla massa *gravitazionale* che porta all'attrazione della

Terra al Sole, della Luna alla Terra, di tutti noi e dei nostri oggetti alla superficie terrestre, e così via? La massa *gravitazionale* è quella che, a rigore, ci informa sulla *pesantezza* di un corpo, ma è la stessa massa (inerziale) che compare nella legge di Newton quando dobbiamo non già valutare il *peso* di un corpo, ma la forza necessaria per modificarne lo stato di moto? L'esperienza fisica mostra che la massa inerziale e quella gravitazionale sono per lo meno *proporzionali*, ma la loro identità numerica, anzi, la loro identità concettuale resterà un problema aperto, in Fisica (e anche per noi), fino a quando Einstein non formulerà la sua Teoria Generale della Relatività.

- La terza legge della Dinamica, anche nota come *principio di azione e reazione*, recita grosso modo così: *se un corpo agisce su di un altro con una certa forza, questo reagirà sul primo con una forza di uguale modulo e direzione, ma verso opposto*. Si tratta di una legge della cui importanza fondamentale non si discute mai abbastanza. In genere la si riduce ad un commento sbrigativo sul fatto che "se spingo una carriola, sentirò la carriola spingere me con una forza uguale e contraria", che ci dice molto poco (e ce lo dice male). Cerchiamo invece di capire bene di che cosa si tratti, perché è su questa terza legge della Dinamica che si fondano alcuni dei concetti più impressionanti di tutta la Fisica moderna. Innanzitutto osserviamo che, a differenza delle prime due leggi, questa richiede che siano presenti *due* corpi, e che essi siano in *interazione* l'uno con l'altro, ovvero che si scambino delle *forze* (in futuro, il termine *interazione* sarà riferito più che altro allo scampio di energia e quantità di moto, ma per il momento parliamo di forze perché è di questo che si occupa la Meccanica newtoniana). Quindi il corpo *A* agisce con una forza sul corpo *B*, determinandone una variazione dello stato di moto in accordo con la legge di Newton. Ma il corpo *B* ha una massa (inerziale), che in qualche modo si "opporrà" alla variazione dello stato di moto (è proprio il concetto di inerzia), e trasferirà al corpo *A*, fonte di questa variazione, una forza uguale e contraria; anche il corpo *A*, naturalmente, subirà questa forza in accordo con quanto dettato dalla legge di Newton. È un meccanismo strano, che più che con l'esempio superficiale (e non molto corretto) dell'uomo che spinge la carriola, possiamo visualizzare in altro modo, ovvero con due carrellini (che immaginiamo in grado di correre su un tavolo senza attrito) che sono inizialmente fermi, legati l'uno all'altro con uno spago e tra i quali sia stata posta una molla, compressa rispetto alla sua posizione di riposo. Abbiamo tutti gli ingredienti richiesti dalla terza legge della Dinamica: *due* oggetti, e un'interazione tra di essi (la molla compressa che trasmetterà una forza). Lo spago che tiene uniti i due carrelli serve solo per preparare l'esperimento (è un modo pratico per "accendere" l'interazione solo quando vogliamo noi). Inizialmente i due carrelli sono fermi. Ad un certo punto taglio lo spago, lasciando la molla libera di agire. Che cosa succede? È intuitivo: la molla spingerà entrambi i carrelli, uno da una parte, l'altro dall'altra, facendoli muovere nella stessa direzione ma in verso opposto. Se i due carrelli hanno massa diversa, quello con massa minore subirà un'accelerazione maggiore (e quindi alla fine avrà una velocità maggiore). Ma è un buon esempio per la terza legge della Dinamica? Sì, perché dobbiamo svincolarci dall'idea che la molla sia un oggetto materiale; non è la molla ad agire con una forza sui due carrelli, la molla è uno strumento concettuale (usatissimo, in Fisica, anche in contesti molto lontani dalla Meccanica) per schematizzare l'interazione tra due corpi (i due carrelli, nel nostro caso). La molla rappresenta il meccanismo con cui il carrello *A* applica una forza sul carrello *B*, e questo, a causa della sua inerzia, a sua volta re-agisce sul carrello *A* tramite lo stesso meccanismo concettuale, la molla stessa. Ma l'esempio dei carrelli, che vanno in versi opposti dopo che li abbiamo liberati dallo spago che li teneva vincolati, ci fa intuire l'importanza capitale del terzo principio della Dinamica: in esso, infatti, è già presente, anche se implicitamente, anche se in maniera non così evidente e chiara, il *principio della conservazione della quantità di moto*. Quando sono fermi, con la molla compressa e lo spago che li vincola l'uno all'altro, i due carrelli costituiscono un *unico* sistema fisico, ancorché composto da due corpi. Quando tagliamo il filo e lasciamo l'interazione libera di agire, ancorché svincolati l'uno all'altro i due carrelli sono *ancora* un unico sistema fisico. Si muovono in versi opposti, soggetti alla *stessa* forza (in modulo), perché la molla che rappresenta l'interazione reciproca è ovviamente la stessa, con accelerazioni in ragione inversa della loro massa, non solo per l'evidente ragione "inerziale" che deriva dalla nostra esperienza sensoriale e dalla legge di Newton, ma anche perché si sta *conservando* la quantità di moto dell'intero sistema: inizialmente c'erano due oggetti fermi, la quantità di moto del sistema era nulla; ora abbiamo due oggetti in movimento, è *necessario* che si muovano lungo la stessa direzione, in verso opposto, e con accelerazioni (durante l'interazione) e alla fine con velocità in ragione inversa della loro massa, perché il centro di massa *totale* dell'intero sistema *deve* restare fermo (perché all'inizio era fermo). Ho usato dei toni forti, dicendo che la quantità di moto si *deve* conservare; ovviamente si tratta di un'osservazione sperimentale, una di quelle leggi fondamentali che non vengono da una teoria, ma che costituiscono le *fondamenta* di una teoria, un'osservazione riproducibile *mai* contraddetta dai risultati sperimentali e che pertanto non può che essere assunta per vera, a fondamento di tutta la Fisica che vogliamo fare. Ma qui ci stiamo allontanando a passi da gigante dallo schema che avevamo iniziato a costruire con le prime due leggi della Dinamica. Fin tanto che abbiamo *un solo* oggetto, possiamo scrivere la legge di Newton e questo ci basta. Ma quando di oggetti ne abbiamo *due*, ed essi sono in *interazione* tra di loro, allora non abbiamo solo *due oggetti distinti e separati*, due sistemi fisici indipendenti per i quali vale, separatamente, la legge di Newton. Ma abbiamo *un solo sistema*, che dobbiamo trattare complessivamente come tale. È vero che ognuno dei due costituenti del sistema continuerà ad obbedire alla legge di Newton, ma ci saranno dei *vincoli* da rispettare, delle *quantità da conservare*, come la quantità di moto ad esempio, che andranno prese in considerazione a livello dell'intero sistema fisico, e non dei suoi costituenti; e il moto di essi sarà in parte determinato proprio dal vincolo imposto da queste leggi di conservazione. Questo ci porta anche a riconsiderare la formulazione della prima legge della dinamica, in cui abbiamo detto che ogni corpo che non sia soggetto a forze *esterne* persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Perché *esterne*? Perché se il nostro sistema fisico è costituito da *un solo* corpo *rigido*, qualunque forza ad esso applicata sarà considerata come una forza *esterna*, e in quanto tale ne modificherà lo stato di moto, accelerandolo. Ma se il sistema fisico è costituito da più corpi interagenti, ovvero il corpo non è rigido, esistono forze *interne*, quelle di interazione per l'appunto, che modificano (in ragione della legge di Newton) lo stato di moto dei singoli costituenti del sistema, ma lasciano *inalterato* lo stato di moto del sistema nel suo complesso, per via della terza legge della Dinamica e dei principi di conservazione che essa sottintende. Le forze *interne* che fanno muovere le placche continentali della Terra non alterano il moto del centro di massa della Terra nella sua orbita attorno al Sole; le forze *interne* tra due gruppi di persone che giocano al tiro alla fune su un vagone ferroviario non alterano in alcun modo il moto del centro di massa del vagone stesso; le forze *interne* di interazione tra i due carrelli dell'esempio che abbiamo fatto prima determineranno sì il moto *relativo* di un carrello rispetto all'altro, e di entrambi rispetto al centro di massa del sistema, ma il moto di quest'ultimo non ne sarà in alcun modo influenzato.

Abbiamo insistito molto su questa importante distinzione tra forze interne e forze esterne, perché è importante ricordare che spesso tale distinzione è una questione di punti di vista. Quando sollevo una scatola dal pavimento, per metterla sul tavolo, posso dire che la scatola è il sistema fisico, e io sto agendo con una forza e ne modifico lo stato di moto (era ferma per terra) accelerandola (la sposto verso l'alto), e poi imprimendole un moto vario che alla fine la porta ad essere nuovamente ferma sul tavolo. In quest'ottica, stiamo ragionando nei soli termini della legge di Newton. Ma posso considerare la scatola e me stesso come un unico sistema. Allora la forza in gioco è una forza di interazione, e io spingo la scatola da una parte, ma essa spinge me dall'altra parte (terza legge della Dinamica). Il caso vuole che io sia *vincolato* con un vincolo rigido (il pavimento) che mi impedisce di muovermi, e quindi la forza di reazione della scatola su di me non ha alcun effetto (se non affaticare i miei muscoli), mentre la forza di azione mia nei confronti della scatola ha come effetto quella di sollevarla. Stiamo violando il principio di conservazione della quantità di moto, perché in origine sia io che la scatola eravamo fermi, ma quando la sollevo io resto fermo, ma la scatola si muove; questa violazione avviene perché non è corretto prendere in esame il sistema costituito da me e dalla scatola, dal momento che è un sistema vincolato (io non posso muovermi nella direzione in cui spinge la scatola perché c'è il pavimento che mi vincola). Ma questo pone in evidenza il limite concettuale dell'ipotesi che abbiamo fatto di considerare me e la scatola come un unico sistema: la violazione della conservazione della quantità di moto indica che non abbiamo preso tutto in considerazione. In realtà devo tenere conto anche del vincolo, ovvero del pianeta Terra a cui, in maniera indiretta tramite la soletta, i pilastri e le fondamenta il pavimento è ancorato. Così, quando io sollevo la scatola, essa, per il principio di azione e reazione, spinge me, e tramite me il pavimento, e tramite il pavimento l'intero pianeta Terra nella stessa direzione e nel verso opposto; così che il centro di massa dell'intero sistema non si muove (perché non si muoveva nemmeno prima). Naturalmente la massa della Terra (più quella delle fondamenta della casa, più quella dei pilastri, più quella del pavimento, più la mia) è talmente più grande di quella della scatola che il moto della Terra (e del pavimento, e mio) rispetto al centro di massa del sistema sarà impercettibile ad ogni indagine strumentale, ma esso *non sarà zero*, perché adesso che abbiamo realmente preso in considerazione tutti i costituenti del sistema possiamo veramente imporre la conservazione della quantità di moto. Naturalmente tutto questo potrebbe non bastare: la Terra è in interazione (gravitazionale) con la Luna, e col Sole, e con tutti gli altri pianeti del Sistema Solare, e in ultima analisi con tutti i corpi celesti dell'Universo. A rigore, le leggi della Dinamica andrebbero applicate *solo* all'intero Universo, perché è l'unico sistema *isolato* per definizione, quello oltre al quale non c'è null'altro perché l'Universo è, per definizione appunto, l'insieme di tutto ciò che esiste. Tuttavia, spesso ci si può accontentare di qualche approssimazione in più che ci consente di prendere in esame solo un numero ristretto di corpi e di interazioni tra di essi, e di immaginare come *isolati* sistemi che in realtà, a rigore, non lo sono, e di applicare ad essi le leggi della Meccanica newtoniana.

Non ci resta che vedere brevemente come si affronta lo studio del problema del moto di un sistema fisico a cui applichiamo la Meccanica newtoniana. Come abbiamo visto, la legge fondamentale è $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Immaginiamo per semplicità che il nostro sistema sia isolato e costituito da un solo corpo, così non abbiamo il problema di prendere in considerazione le forze interne e i principi di conservazione. Il nostro sistema di massa m è allora soggetto ad un certo numero di forze (quante e di che natura siano è irrilevante), che si comporranno vettorialmente in modo da determinare una forza *risultante* che, per effetto della legge di Newton, determinerà un'accelerazione sul corpo stesso. In termini di equazioni, allora, la seconda legge della Dinamica si può scrivere così (dove, trattandosi di un'equazione, abbiamo scambiato d'ordine il primo e il secondo membro, non facendo alcuna differenza):

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

L'accelerazione del sistema, moltiplicata per la sua massa, sarà data secondo questa equazione dalla *somma*, vettoriale, di tutte le forze F_i che agiscono sul sistema stesso. Ma l'accelerazione, così come la forza, è un vettore nello spazio tridimensionale (lo spazio nel quale viviamo), e pertanto l'equazione precedente può essere *scomposta* nelle sue componenti, lungo tre assi coordinati cartesiani perpendicolari l'uno all'altro che chiamiamo convenzionalmente assi *x*, *y* e *z*:

$$ma_x = \sum_i F_{x_i};\ ma_y = \sum_i F_{y_i};\ ma_z = \sum_i F_{z_i}$$

Tre equazioni, quindi, da risolvere insieme, contemporaneamente. Ma l'accelerazione è una *variazione* di velocità nel tempo, e la velocità a sua volta è una *variazione* di posizione nel tempo. Matematicamente, grazie a Newton stesso e a Leibniz di cui abbiamo accennato prima, questo si traduce dicendo che l'accelerazione è la *derivata* rispetto al tempo della velocità, e quest'ultima è la *derivata* rispetto al tempo della posizione. La notazione convenzionale è la seguente:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt};\ v_x = \frac{dx}{dt};\ a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

dove naturalmente valgono relazioni analoghe anche per le altre due componenti *y* e *z* dell'accelerazione. Convenzionalmente, per brevità, in Meccanica la derivata fatta rispetto al tempo si indica con un puntino sopra la grandezza derivata:

$$a_x = \dot{v_x};\ v_x = \dot{x};\ a_x = \ddot{x}$$

Ed ecco che allora, finalmente, le *equazioni del moto* di un problema trattato secondo la Meccanica newtoniana sono le seguenti:

$$m\ddot{x} = \sum_i F_{x_i};\ m\ddot{y} = \sum_i F_{y_i};\ m\ddot{z} = \sum_i F_{z_i}$$

Tre equazioni *differenziali* (perché le incognite *x*, *y* e *z* compaiono sotto forma delle loro derivate) del *secondo ordine* (perché le derivate sono del secondo ordine rispetto al tempo) da risolvere contemporaneamente.

Concettualmente il problema del moto del sistema è risolto: una volta che ho scritto queste tre equazioni (tutto ciò che mi serve conoscere è l'espressione completa, funzione della posizione nello spazio e del tempo, di tutte le forze agenti sul sistema), e una volta che conosco le *condizioni iniziali* (posizione e velocità del sistema ad un istante qualsiasi di tempo), la matematica mi assicura che sarò in grado di calcolare con *assoluta precisione* lo *stato* del sistema (posizione e velocità) a *qualsiasi istante di tempo*, nel passato e nel futuro. Il problema potrà essere complicato, perché magari il secondo membro di queste equazioni ha una struttura matematica piuttosto ricca, e addirittura potrei ritrovarmi nella situazione in cui non si conosce un metodo analitico per risolvere queste equazioni, ma *concettualmente* la dinamica newtoniana mi assicura che non mi serve altro: conoscenza completa di tutte le forze in gioco, conoscenza delle condizioni iniziali del sistema, e potrò in linea di principio sapere con assoluta precisione posizione e velocità del sistema in qualunque istante di tempo. Non male davvero. Ma sarà proprio così?

A presto,

Marco