

Dal Quark al Quasar

Pensieri di Fisica, sulla Natura e sull'Universo

Meccanica lagrangiana

Sabato 15 aprile 2006

Caro Amico,

il problema del moto, almeno formalmente, può dirsi risolto. La Meccanica newtoniana ci pone sempre nelle condizioni, per qualunque sistema meccanico, di scriverne le equazioni del moto sotto forma di equazioni differenziali; la conoscenza dello *stato* del sistema (posizione e velocità) in un istante di tempo a nostra scelta ci permette di conoscere con infinita precisione lo stato che il sistema ha avuto, o avrà, in un qualsiasi istante di tempo nel passato o nel futuro. La trattazione che abbiamo fatto della Meccanica newtoniana non è naturalmente sufficiente per permetterci di affrontare *qualunque* problema meccanico: abbiamo infatti tralasciato alcuni aspetti importanti, come la trattazione dei vincoli o gli aspetti più sottili riguardanti le leggi di conservazione, ma ciò nonostante possiamo ritenerci concettualmente abbastanza soddisfatti: la Meccanica newtoniana ha sostanzialmente risolto il problema del moto. Non male.

Eppure ci sono alcune cose che ci lasciano insoddisfatti. Innanzitutto il problema è risolto solo formalmente: salvo i casi più semplici, infatti, le equazioni differenziali che siamo chiamati a risolvere sono troppo complicate, e non possiamo fare altro che procedere per via numerica; questa strada è percorribile solo da pochissimo tempo, da quando i computer sono diventati sufficientemente veloci, ma anche così la maggior parte dei problemi meccanici è di gran lunga troppo complessa per poter essere affrontata con algoritmi di tipo numerico; è quindi ben comprensibile la sensazione di frustrazione che i fisici e i matematici del XVII e XVIII secolo dovevano avere dinnanzi ad una teoria fisica così meravigliosa, strumenti matematici così affascinanti, eppure equazioni così difficili, se non impossibili, da risolvere. Un altro grosso problema è la natura vettoriale dell'equazione di Newton, che origina dalla vettorialità di forze ed accelerazioni che dobbiamo prendere in considerazione quando affrontiamo un problema di tipo meccanico. Così, per ogni sistema fisico studiato, ci ritroviamo con tre equazioni differenziali, e tutte e tre vanno risolte per poter acquisire una conoscenza completa del comportamento dinamico del sistema.

Gli strumenti che il calcolo differenziale introdotto da Newton stesso e da Leibniz offrivano al fisico o al matematico, insieme con l'algebrizzazione della geometria iniziata da Cartesio contemporaneamente al lavoro di Newton, portarono nel XVII e soprattutto nel XVIII secolo ad uno sviluppo poderoso delle tecniche analitiche teoriche ed applicate, sia alla geometria (il cui trionfo avverrà nel XIX secolo e raggiungerà l'apice con la Teoria Generale della Relatività), sia alla Meccanica, al punto che la Meccanica newtoniana, quella lagrangiana di cui ci occupiamo oggi e quella hamiltoniana di cui ci occupiamo la prossima volta vanno sotto il titolo generale di Meccanica analitica. Come mai si sia sentita l'esigenza di andare oltre l'equazione di Newton dovrebbe ormai essere chiaro; ma quali conseguenze ha avuto questo processo?

La legge di Newton ha tre difetti: è vettoriale, genera equazioni differenziali del secondo ordine (più aumenta l'ordine dell'equazione, più essa è difficile da risolvere) e non tiene conto in maniera esplicita dei vincoli che dovessero essere imposti al sistema dinamico (una biella impernata eccentricamente su una ruota offre un esempio di un vincolo, ma anche una pallina che rotola in una bacinella, con le sue pareti ricurve, offre un altro esempio di vincolo). Volendo risolvere, o per lo meno mitigare l'effetto, di questi tre problemi, come potremmo procedere? La teoria generale che affronta matematicamente questi temi va sotto il nome di *calcolo variazionale*, che è una sorta di generalizzazione del calcolo differenziale in cui le operazioni di "derivazione" non vengono più fatte rispetto a semplici variabili, ma rispetto a funzioni. Non è nel nostro interesse, qui, affrontare matematicamente il discorso, anche se ne faremo un cenno in un prossimo futuro. Ci interessa però cercare di capire quali vantaggi abbia portato la formulazione, secondo questo paradigma matematico, della Meccanica lagrangiana, che deve il suo nome al matematico torinese Joseph Louis Lagrange (nato come Giuseppe Luigi Lagrangia ma che poi ha francesizzato il suo nome dopo essersi trasferito a Parigi ed aver assunto la cittadinanza francese).

- Benché la Meccanica newtoniana descriva un sistema fisico (a meno della presenza di vincoli) con un'unica equazione, essa è di natura vettoriale. La Meccanica lagrangiana cerca di semplificare la trattazione formale del problema descrivendolo mediante un'unica equazione *scalare* e non vettoriale.

Essa in realtà riesce solo in parte nel suo intento, poiché le equazioni descrittive del problema potranno, a seconda dei casi, essere una o più di una, ma la *funzione* (detta *Lagrangiana*) che entra a far parte di queste equazioni è effettivamente scalare. Essa è definita come la *differenza* tra l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema oggetto di studio. Essa, quindi, *non è l'energia meccanica totale* del sistema (che ne è la somma). Chiamiamo pertanto *Lagrangiana* la *funzione* $L = T - U$.

- L'energia cinetica T e l'energia potenziale U del sistema sono grandezze scalari, e pertanto tale sarà la Lagrangiana L . Tuttavia il moto del sistema si manifesta nello spazio tridimensionale che ci circonda, quindi in qualche maniera questa natura vettoriale dell'informazione fisica dovrà emergere dalle nostre equazioni. Naturalmente, essa è in primo luogo contenuta nel fatto che tanto T quanto U non sono *numeri*, ma sono *funzioni*. Esse infatti dipendono dalla *posizione* nello spazio occupata dal sistema (qualora esso sia puntiforme o ci stiamo occupando del suo solo centro di massa), o da ognuno dei suoi costituenti. Sempre restando, per semplicità, nel caso di sistema puntiforme o comunque *rigido* (di cui quindi consideriamo solo il moto del centro di massa), T ed U saranno allora funzioni delle coordinate spaziali x , y e z , ed eventualmente anche del tempo t . Implicitamente, se il sistema è in movimento, tanto l'energia cinetica quanto quella potenziale saranno sempre funzioni del tempo, in quanto le tre coordinate spaziali sono funzioni di esso (perché il sistema è in moto); tuttavia T e U potrebbero anche essere funzioni *esplicite* del tempo, in tutte quelle condizioni (come avremo modo di precisare più avanti) in cui il sistema *scambia* energia con l'esterno (dissipandola o assorbendola). Per brevità di notazione, chiamiamo genericamente q le coordinate x , y e z di modo che $T = T(x,y,z,t) = T(q,t)$, e idem dicasi per U . Il simbolo q indica pertanto una generica coordinata spaziale, ed esso da solo può indicare anche un *insieme* di coordinate spaziali, ad esempio le tre coordinate dello spazio che ci circonda. Per evitare questa confusione si potrebbe in realtà affinare un po' la notazione, assegnando degli indici al simbolo q , di modo che ad esempio $q_1=x$, $q_2=y$ e $q_3=z$ ma per i nostri scopi non è sempre necessario arrivare a tanto.
- Aver introdotto una dipendenza funzionale della Lagrangiana dalle coordinate spaziali è solo il primo passo per recuperare la natura vettoriale del problema fisico che stiamo studiando. Ed avremmo tranquillamente potuto fare a meno di introdurre quell'ostico e apparentemente inutile cambio di variabile nella definizione delle funzioni T ed U . Ma in realtà l'abbiamo fatto per compiacere agli sviluppi di quella che di lì a poco sarebbe divenuta nota, in Matematica, col nome di Geometria Differenziale. Cerchiamo di renderci conto di che cosa si tratta. Siamo abituati a considerare lo spazio che ci circonda come uno spazio tridimensionale, e grazie al lavoro di Cartesio nel XVII secolo oggi non abbiamo alcuna perplessità nell'assegnare ad ognuno degli infiniti punti di questo spazio una *terna* di coordinate (che chiamiamo infatti *cartesiane*) che identificano in maniera univoca tale punto nello spazio, fissata un'origine ed una direzione per i tre assi coordinati di riferimento. Se desidero studiare il problema meccanico del moto di una pallina scagliata con forza in aria dal mio braccio, è a questo spazio che dovrò fare riferimento quando scriverò l'energia cinetica e l'energia potenziale (e quindi la Lagrangiana) della pallina. Ad esempio sceglierò l'origine degli assi coordinati in corrispondenza del punto in cui la pallina si stacca dalla mia mano che la lancia, ponendo come asse x quello orizzontale, come asse z quello verticale e come asse y quello ad entrambi ortogonale; T ed U saranno date in funzione di tali assi e di tale origine. Questa scelta, però, è logica ed intuitiva perché la pallina, una volta scagliata, è libera di muoversi senza *vincoli* nell'intero spazio tridimensionale. Se non lo farà, sarà perché le *condizioni iniziali* del moto che le avremo imposto quando l'abbiamo scagliata la forzeranno su una ben precisa traiettoria che non la porterà certo nell'intero spazio tridimensionale, ma ogni punto di esso è in linea di principio accessibile da altre palline che dovessimo scagliare con condizioni iniziali (posizione e velocità, quest'ultima naturalmente è a sua volta una grandezza vettoriale) diverse. Molto differente è il caso ad esempio di una pallina *vincolata* a rotolare sul fondo di una bacinella. Trascurando il caso in cui forniamo ad essa energia sufficiente per oltrepassare il bordo del recipiente, la pallina sarà costretta a rotolare solo in una porzione di spazio tridimensionale ben definita, lungo una *superficie* che è, per l'appunto, il fondo della bacinella. La pallina scagliata in aria dal mio braccio si muove in uno spazio a tre dimensioni, perché non ha vincoli di sorta, ma la pallina che si muove sul fondo della bacinella in realtà si muove su una *superficie*, che è uno spazio a *due* dimensioni (ovviamente *immerso* nel più grande spazio tridimensionale che ci circonda). Similmente, il peso che si trova all'estremità dell'asta di un orologio a pendolo oscilla nello spazio tridimensionale, ma è in effetti *vincolato* all'asta al punto che esso compie un moto lungo una *linea* (curva, perché è un arco di cerchio); e una *linea* è uno spazio ad *una* dimensione, ancorché pure esso *immerso* nel ben più grande spazio tridimensionale che ci circonda. Orbene, l'approccio newtoniano alla Meccanica impone di scrivere l'equazione di Newton riferita allo spazio tridimensionale in cui avviene il moto, e di tenere conto dei *vincoli* (la costrizione della pallina a restare sul fondo della bacinella, o la costrizione del peso a muoversi lungo un arco di cerchio come imposto dall'asta) mediante equazioni addizionali. L'approccio lagrangiano alla Meccanica, invece, sfrutta gli strumenti matematici messi a disposizione della Geometria Differenziale per eliminare le equazioni riguardanti i vincoli; esse vengono inglobate direttamente nelle equazioni

del moto, modificandole in maniera opportuna. La semplificazione è evidente (ho eliminato delle equazioni), ma per fare questo devo cambiare il formalismo matematico, o meglio devo generalizzarlo. Così, la Lagrangiana della pallina scagliata in aria dalla mia mano sarà funzione delle coordinate q che non saranno altro che la terna cartesiana x, y e z a cui siamo abituati, perché il moto di tale particella non è soggetto a vincoli; ma la Lagrangiana della pallina vincolata al fondo della bacinella sarà funzione di *due* coordinate q che non saranno direttamente x, y o z , ma saranno a loro volta delle *funzioni* di esse; è in queste *funzioni* che è racchiusa la *forma* e la *natura* del vincolo. Similmente, la Lagrangiana del peso oscillante di un orologio a pendolo sarà funzione di *una sola* coordinata q anch'essa funzione delle *tre* coordinate cartesiane dello spazio che ci circonda; una sola coordinata, perché il moto del grave, a causa del suo vincolo, è vincolato ad una linea (unidimensionale). Può sembrare una cosa strana, ma in realtà è qualche cosa a cui siamo sorprendentemente abituati: trascurando l'altitudine, quando vogliamo identificare un punto sulla superficie della Terra non usiamo certo una *terna* di coordinate x, y e z riferite ad esempio a degli assi che abbiano origine al centro del Sole (che pure sarebbe un sistema di riferimento piuttosto furbo), usiamo piuttosto una *coppia* di coordinate che chiamiamo *longitudine* e *latitudine*; il moto di un veicolo sulla superficie della Terra sarà allora realisticamente descritto non tanto in riferimento alla terna cartesiana che ha origine al centro del Sole, quanto più probabilmente come l'andamento temporale della *longitudine* e della *latitudine* di quel veicolo sulla Terra, fissati il parallelo di riferimento (l'Equatore) e il meridiano di riferimento (convenzionalmente quello che passa per Greenwich). Poiché il moto del veicolo sulla Terra è vincolato alla sua *superficie*, che è bidimensionale, due sole coordinate sono sufficienti per descriverlo. Se volessimo descriverlo tramite il sistema di riferimento tridimensionale che ha origine al centro del Sole dovremmo impiegare non solo una coordinata in più, ma anche un'equazione in più, ovvero il *vincolo* che costringe il veicolo a non staccarsi mai dalla superficie terrestre. L'impiego delle coordinate *longitudine* e *latitudine* semplifica il problema, eliminando una coordinata e un'equazione, ma naturalmente con la complicazione che ora le coordinate non sono più "semplici" come quelle lineari cartesiane, ma sono *funzioni* non lineari delle stesse. Ecco, l'approccio lagrangiano alla Meccanica fa questo: l'uso delle coordinate *generalizzate* q in luogo delle coordinate cartesiane ci dà un approccio matematico di per sé indipendente dalla dimensione dello spazio in cui avviene il moto, e quindi in grado di descrivere indifferentemente sia il moto di sistemi liberi (la pallina scagliata in aria), sia il moto di sistemi vincolati (la pallina sul fondo della bacinella o il peso dell'orologio a pendolo), purché il vincolo, se presente, sia "trasferito" nella *geometria* dello spazio su cui avviene il moto, e di conseguenza nella sua *metrica* (il sistema di coordinate che scegliamo di usare su tale spazio).

- La funzione Lagrangiana, allora, scelto lo *spazio* in cui avviene il moto del sistema, e scelta la *metrica* che ne dà un sistema di coordinate, sarà la differenza delle *funzioni* energia cinetica T ed energia potenziale U del sistema oggetto di studio scritte secondo le coordinate q dello spazio in cui avviene il moto. Sì, ma come avviene il moto? Le cosiddette *equazioni di Eulero-Lagrange* permettono di calcolare le equazioni del moto a partire dalla Lagrangiana:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

Sembra si tratti di un'equazione sola, ma non dobbiamo dimenticare che il simbolo q può indicare un *insieme* di coordinate, nel qual caso abbiamo un'equazione per ogni coordinata. Come già sai, il simbolo \dot{q} indica la derivata temporale della coordinata q rispetto al tempo; poiché q è una *posizione*, \dot{q} è una *velocità* lungo la coordinata q di quella *metrica* di quello spazio.

È tutto apparentemente molto complicato. Ma in realtà non è così. Questa generalizzazione della Meccanica newtoniana non solo ci ha permesso di descrivere con una sola equazione sistemi vincolati, ma ci permette di vedere le proprietà dei sistemi dinamici secondo un'ottica più generale. Vediamo ad esempio il caso più semplice, quello di un punto materiale in moto libero nello spazio tridimensionale. Per semplicità diciamo che il punto materiale si muove *non soggetto a forze* lungo una certa direzione nello spazio tridimensionale attorno a noi. In questo caso, allora:

$$q_1 = x; \quad q_2 = y; \quad q_3 = z$$

$$\dot{q}_1 = v_x; \quad \dot{q}_2 = v_y; \quad \dot{q}_3 = v_z;$$

$$L = T - U = \frac{1}{2}m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange saranno allora le seguenti:

$$\frac{d}{dt}m\dot{q}_1 = 0; \quad \frac{d}{dt}m\dot{q}_2 = 0; \quad \frac{d}{dt}m\dot{q}_3 = 0$$

Ora la massa m non dipende dal tempo, quindi le derivate temporali si applicano solo alle tre velocità. Ma dire che la derivata temporale di una velocità è nulla, vuol dire che essa non varia nel tempo (e infatti la derivata temporale di una velocità è un'accelerazione); ma dire che una velocità non varia nel tempo, vuol dire che il sistema percorre un moto rettilineo uniforme, in accordo con la prima legge della Dinamica, visto che per ipotesi il nostro sistema non era soggetto a forze esterne; tutto coerente, quindi. Ma questo risultato nasce, matematicamente, dal fatto che la Lagrangiana del sistema dipende dalle velocità, ma *non dipende* dalle posizioni; è in virtù di questo fatto che, nelle equazioni di Eulero-Lagrange, il termine in cui la Lagrangiana viene derivata rispetto alle coordinate q è sempre nullo, e pertanto nulla è la derivata temporale delle velocità rispetto alle coordinate spaziali.

Ben diverso è il caso, seppure anche questo, di un sistema che si muove lungo una ben precisa direzione (e quindi per descriverne il moto, in Meccanica lagrangiana, è sufficiente una sola coordinata q) e che sia descritto da questa Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \alpha q$$

Essa, banalmente, somma all'energia cinetica del sistema un'energia potenziale che è funzione della coordinata q , e che vale 0 all'origine della coordinata q , e varia linearmente con essa. Quali sono le equazioni di Eulero-Lagrange? Essendovi una sola coordinata, ve ne sarà una sola:

$$\frac{d}{dt}m\dot{q} + \alpha = 0$$

Ovvero:

$$\frac{d}{dt}m\dot{q} = -\alpha$$

Ma il primo membro dell'equazione è la massa del sistema moltiplicata per la variazione temporale della sua velocità (quindi la sua accelerazione), quindi il famoso termine $m\mathbf{a}$ dell'equazione di Newton; e il secondo membro, allora, sarà dato dalla somma delle forze che agiscono sul sistema: abbiamo riscritto, banalmente, la dinamica newtoniana tramite la Lagrangiana. Non sarebbe stato un passo molto importante, se non fosse che qui la coordinata q è *assolutamente generica*, non coincide necessariamente con una coordinata dello spazio tridimensionale che ci circonda (ad esempio la coordinata z di un sistema in caduta libera). Ovvero: la Meccanica lagrangiana permette di riscrivere formalmente le medesime equazioni della Meccanica newtoniana, ma in uno spazio che non coincide necessariamente con lo spazio tridimensionale che ci circonda. Questo ci permette di incorporare i vincoli nella *metrica* dello spazio (le coordinate q) senza dover ricorrere ad equazioni aggiuntive che li descrivano.

Non solo, ma anche qualora le equazioni di Eulero-Lagrange fossero troppo difficili da risolvere (anche in questo caso, infatti, si tratta di equazioni differenziali del secondo ordine, dal momento che si deriva rispetto al tempo una derivata della Lagrangiana rispetto alle velocità, che sono a loro volta delle derivate rispetto al tempo delle coordinate), la loro struttura ci dà delle informazioni estremamente importanti; infatti, sia ad esempio il sistema fisico descrivibile da *due* coordinate q_1 e q_2 , e di conseguenza dalle loro derivate temporali (velocità). Poniamo il caso in cui la Lagrangiana *non* dipenda dalla coordinata q_2 :

$$L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, q_1)$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange saranno allora:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_1}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = 0;$$

ovvero la velocità lungo la direzione q_2 non varia nel tempo; in altre parole, *anche se non so risolvere le equazioni del moto*, il fatto stesso che la Lagrangiana non dipenda esplicitamente da una certa coordinata mi assicura che la velocità lungo quella direzione è costante (ovvero si conserva la componente lungo quella direzione della quantità di moto). Similmente, se la Lagrangiana non dipende esplicitamente da una delle velocità:

$$L(\dot{q}_1, q_1, q_2)$$

allora le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0;$$

ovvero, *anche se non so risolvere le equazioni del moto*, il fatto stesso che la Lagrangiana non dipenda esplicitamente dalla velocità lungo una certa coordinata mi assicura che durante il moto quella coordinata rimarrà costante (ovvero si conserva la posizione lungo quella coordinata).

Seppur faticosamente, stiamo radicalmente cambiando il nostro modo di vedere la Meccanica. Non è più un bel gioco di forze che si compongono nello spazio tridimensionale e che accelerano il nostro sistema (o i suoi costituenti); non è più una questione di esprimere i vincoli del sistema sotto forma di equazioni che vanno applicate all'insieme delle equazioni di Newton del sistema. È qualche cosa di molto diverso, di più generale: lo spazio è molto più astratto, non è necessariamente lo spazio tridimensionale che ci circonda, ma è uno spazio in cui il sistema si muove *senza essere soggetto ad alcun vincolo*; per fare questo, inglobiamo le equazioni dei vincoli nella *geometria* dello spazio, ovvero nel numero delle sue dimensioni e nel sistema di coordinate (*metrica*) che scegliamo per esso; con questa scelta, le equazioni di Newton tornano ed essere sempre loro, solo che sono scritte in uno spazio con una natura diversa, più generale (che prende il nome di *varietà differenziabile*), e allora prendono il nome di equazioni di Eulero-Lagrange. E benché ancora abbiamo a che fare con equazioni differenziali del secondo ordine, se il sistema è vincolato abbiamo la possibilità di ridurre il numero di equazioni rispetto al caso newtoniano, e la struttura delle equazioni di Eulero-Lagrange ci permette comunque di sapere se certe quantità si *conservano* oppure no semplicemente dalla dipendenza esplicita della Lagrangiana da coordinate generalizzate e rispettive velocità. Non solo, ma qualora il sistema sia più complicato di un semplice punto materiale, ma sia ad esempio costituito da due oggetti *interagenti* (le due masse che interagiscono tramite una molla, di cui abbiamo parlato la volta scorsa, giusto per fare un esempio), l'approccio lagrangiano alla Meccanica ci permette di definire uno spazio generalizzato in cui anche l'interazione tra i componenti del sistema viene scritta secondo la *metrica* dello spazio; e se tale interazione comporta dei vincoli (parti del sistema che ad esempio sono legate tra di loro, o che pur essendo libere non possono compenetrarsi) essi stessi si esprimeranno nella geometria dello spazio e nella sua *metrica*. La Meccanica newtoniana manteneva semplice la struttura dello spazio, ma le sue equazioni potevano diventare presto molto complicate; la Meccanica lagrangiana mantiene (relativamente) semplici le equazioni, ma complica la geometria dello spazio; il vantaggio è che diventa possibile la descrizione formale di problemi troppo complessi per essere trattati con l'approccio newtoniano alla Meccanica, e che considerazioni generali sul moto del sistema o dei suoi componenti si possono inferire già dalla struttura della Lagrangiana stessa, prima ancora di saper risolvere le equazioni di Eulero-Lagrange.

Se queste, poi, sono risolvibili, allora la sola conoscenza di posizione e velocità del sistema (o di ogni sua componente) in un certo istante di tempo permetterà di calcolare con infinita precisione lo *stato* del sistema stesso in un *qualunque* istante di tempo, nel passato o nel futuro. Ma sarà proprio così?

A presto,

Marco