

Dal Quark al Quasar

Pensieri di Fisica, sulla Natura e sull'Universo

Meccanica hamiltoniana

Domenica 21 maggio 2006

Caro Amico,

la formulazione lagrangiana della Meccanica ci ha aperto molte prospettive nuove, in particolare per via della sua caratteristica di consentire una trattazione del problema del moto modificando profondamente il punto di vista rispetto alla Meccanica newtoniana, ovvero spostando il problema dei vincoli dalle equazioni differenziali del sistema alla *metrica* che definisce il sistema di coordinate su cui sono scritte le equazioni differenziali stesse. Tuttavia, la Meccanica lagrangiana ha risolto solo alcuni dei problemi che la formulazione newtoniana aveva lasciato aperti. Infatti, ad esempio, ancora abbiamo a che fare con equazioni differenziali del secondo ordine. Ma sopra tutto questo, un problema che oserei definire "estetico" affligge la Meccanica lagrangiana: la funzione $L(q, \dot{q}, t)$ pur avendo le dimensioni di un'energia non ne ha il significato fisico; anzi, apparentemente è priva di un evidente significato fisico. Benché in qualche modo vedremo che riusciremo a ripescarne uno in una prossima occasione, resta l'esigenza culturale ed estetica di rimediare a questo "difetto": se riuscissimo a rifondare la Meccanica su basi simili a quelle della formulazione lagrangiana ma dando all'energia meccanica totale del sistema un ruolo formale privilegiato, e magari nel contempo anche ad abbassare di ordine le equazioni differenziali del moto così da renderne più semplice l'integrazione, avremmo dato un contributo eccellente al progresso delle conoscenze teoriche di Meccanica. Ci riusciremo?

Per noi c'è riuscito William Rowan Hamilton (1805-1865), naturalmente non da solo: alla Meccanica che prende il suo nome, ovvero *hamiltoniana*, hanno lavorato altri personaggi come Legendre, Poisson, Jacobi, Poincaré giusto per citarne solo alcuni; e i risultati sono stati formidabili. Matematicamente, la formulazione hamiltoniana della Meccanica è legata a quella lagrangiana in una maniera estremamente profonda e feconda che qui, per non essere costretti a divagare in una troppo lunga parentesi matematica, non accenneremo nemmeno. Fisicamente, il ruolo fondamentale non è più ricoperto dalla *lagrangiana* L , ma dall'*hamiltoniana* H . Se stai pensando a quell'*hamiltoniana* che compare nell'equazione di Schrödinger sei sulla buona strada, stiamo percorrendo il cammino che ci porterà proprio là. Orbene, l'*hamiltoniana* H è definita come la *somma* (e non più come la *differenza*, come nel caso della lagrangiana) di energia cinetica ed energia potenziale, ovvero $H = T + U$. Per un sistema meccanico, questa è esattamente l'energia meccanica *totale* del sistema. Le equazioni del moto non sono più quelle di Eulero-Lagrange, ma quelle di Hamilton:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

Ti ricordo che il puntino al di sopra di una grandezza ne indica la derivata temporale. La notazione qui è equivalente a quella che già abbiamo usato per la Meccanica lagrangiana: q indica le posizioni o coordinate generalizzate, che saranno le tre coordinate cartesiane dello spazio che ci circonda per un sistema libero, ma saranno coordinate opportunamente definite su spazi diversi per sistemi vincolati, mentre p indica gli *impulsi* generalizzati, ovvero il prodotto di massa e velocità \dot{q} del sistema (o delle sue costituenti). Come anche nel caso della Meccanica lagrangiana, per semplicità di notazione omettiamo gli indici che specificherebbero quale coordinata generalizzata o quale impulso generalizzato stiamo trattando, essendo ad esempio tre per tipo (x, y e z e p_x, p_y e p_z nello spazio tridimensionale per il moto di un sistema libero), e indichiamo con q e p tanto una *singola* coordinata o un *singolo* impulso generalizzato, quanto l'insieme di tutte le coordinate e impulsi generalizzati che definiscono il nostro sistema meccanico, a seconda dei casi. Appare subito evidente, che mentre avevamo *una sola* equazione di Eulero-Lagrange per ogni coppia di coordinate (q, \dot{q}) nel caso lagrangiano, in quello hamiltoniano abbiamo *due* equazioni per ogni coppia di coordinate (q, p); abbiamo raddoppiato il numero delle equazioni, ma queste sono diventate di primo ordine: matematicamente, abbiamo semplificato il problema; fisicamente, l'abbiamo ricondotto ad una funzione, l'*hamiltoniana*, di cui sappiamo identificare in maniera chiara il significato fisico.

Se la faccenda fosse finita lì, la Meccanica hamiltoniana sarebbe interessante concettualmente, utile praticamente (è la formulazione della Meccanica che permette di risolvere il maggior numero di problemi), ma non sarebbe nulla di rivoluzionario. E invece racchiude in sé alcuni risultati, fisici e matematici, che avranno un peso fondamentale nello sviluppo di concetti nuovi e rivoluzionari, e che cercheremo in qualche modo di esplorare. Rinviamo alle prossime epistole alcuni argomenti che scaturiscono dalla Meccanica hamiltoniana, e concentriamoci qui su un aspetto interessante: siamo in grado di individuare, osservando l'hamiltoniana, i suoi *integrali primi*, anche detti *costanti del moto*? Ti ricordo, dall'analisi della lagrangiana, che eravamo giunti a concludere che se essa non dipende da una certa posizione o da una certa velocità, la velocità o la posizione ad essa associata non cambia nel tempo, è una costante del moto, si *conserva*. E nel caso della Meccanica hamiltoniana? Evidentemente è ancora così: se H non dipende da p , la prima equazione ha il secondo membro uguale a zero; poiché esso è uguagliato alla derivata temporale della coordinata associata (da ora in avanti la chiameremo *coniugata*) q , otteniamo che q non varia nel tempo; ovvero *si conserva*; ovvero è una *costante del moto* o un suo *integrale primo*. Assolutamente analogo è il caso in cui H non dipenda da q , nel qual caso la derivata temporale dell'impulso coniugato p risulta essere nulla, e quindi l'impulso risulta essere una quantità conservata. Il bello è che le strutture matematiche con le quali è possibile fondare in maniera rigorosa la Meccanica hamiltoniana assicurano delle condizioni più generali per l'esistenza di un integrale primo del moto, anche quando il sistema di coordinate scelto per la metrica sulla quale rappresentiamo l'hamiltoniana non mostra in maniera evidente l'indipendenza di H da una certa q o una certa p . Queste condizioni sono date dalle cosiddette *parentesi di Poisson*, una particolare operazione matematica che, introducendo per una volta gli indici che distinguono le molteplici coordinate q e p che entrano a far parte dell'hamiltoniana, e detta F una generica grandezza fisica di cui diremo di più a breve, sono definite come segue:

$$\{H, F\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right)$$

Ignoriamo il fatto che l'indice i se associato alle p è scritto in basso e se associato alle q è scritto in alto, è una questione matematica qui irrilevante. Quello che conta è che la *parentesi di Poisson* di una generica grandezza F con l'hamiltoniana H è identificata dal simbolo $\{H, F\}$ ed è data dall'espressione, apparentemente complicata, a secondo membro della definizione data sopra. A che ci serve tutto questo? La matematica ci assicura che F è un *integrale primo* (o *costante del moto*) del sistema meccanico avente l'hamiltoniana H se la sua *parentesi di Poisson* con essa è uguale a zero.

Prendiamo un esempio banale, il consueto sistema meccanico libero che si muove di moto rettilineo uniforme lungo la direzione che chiamo x . La sua hamiltoniana, mancando un termine di energia potenziale, sarà data dalla sola energia cinetica:

$$H = \frac{p_x^2}{2m}$$

Dalle equazioni di Hamilton sappiamo che

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

e quindi p_x non varia nel tempo, ovvero si conserva; come dire, come già sapevamo, che il sistema si muove lungo la direzione x di moto rettilineo uniforme. Verifichiamo in questo caso elementare che la *parentesi di Poisson* della costante del moto p_x con H sia effettivamente nulla:

$$\{H, p_x\} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial p_x}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial p_x}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$$

È facile verificare che anche y , z , p_y e p_z sono costanti del moto (come è intuitivo che sia, essendo il moto diretto lungo la sola direzione x), mentre ovviamente p_x non lo è. Se apparentemente le *parentesi di Poisson* sono una gran seccatura, una complicazione di un qualche cosa di semplice, in realtà vanno considerate come una grande risorsa: immagina un sistema meccanico molto complesso, composto da molti costituenti, con molti vincoli ed interazioni tra le parti, in cui la metrica è tutt'altro che banale e le numerose coordinate (q^i, p_i) vivono su uno spazio curvo complicato; magari questo sistema ha degli integrali primi tutt'altro che ovvi, non c'è nessuna coordinata che *non* compare esplicitamente nell'hamiltoniana, eppure ci sono delle grandezze che si conservano (qualche componente del momento angolare, per

esempio). Come fare a trovarle *prima* di aver integrato le equazioni del moto (cosa che magari non si è in grado di fare fino a che, trovando qualche costante del moto, non si riesce a semplificare matematicamente il problema)? Le parentesi di Poisson diventano una grande risorsa: bisogna individuare quelle grandezze fisiche la cui parentesi di Poisson con l'hamiltoniana del sistema sia nulla, ed esse saranno delle costanti del moto; lo sappiamo per certo, ce lo assicura la matematica, non abbiamo bisogno di (saper) integrare il sistema di equazioni differenziali del moto per poterlo dire. Un esempio nemmeno troppo complicato viene dal classico problema del moto di un pianeta attorno alla sua stella; pensiamo, giusto per non andare troppo lontano, all'orbita della Terra attorno al Sole. Sia m la massa della Terra, M la massa del Sole, e trascuriamo l'interazione di questi due corpi col resto dell'Universo. L'hamiltoniana del sistema sarà data dall'energia cinetica della Terra sommata all'energia potenziale gravitazionale di interazione col Sole:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + G \frac{mM}{x^2 + y^2}$$

dove G è la costante di accoppiamento gravitazionale. Vista così, questa hamiltoniana promette poco di buono: le grandezze x , y , p_x e p_y compaiono tutte, e apparentemente non c'è grande spazio per trovare delle costanti del moto. Tuttavia, a titolo di tentativo, prendiamo in considerazione la quantità $L_z = xp_y - yp_x$, che potrà avere un aspetto strano, ma vedremo poi perché. Quanto vale la parentesi di Poisson tra l'hamiltoniana e questa quantità?

$$\{H, L_z\} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial L_z}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial L_z}{\partial p_x} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial L_z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial L_z}{\partial p_y} = \frac{p_x}{m} \cdot p_y - G \frac{2mM}{(x^2 + y^2)^2} xy - \frac{p_y}{m} \cdot p_x + G \frac{2mM}{(x^2 + y^2)^2} xy = 0$$

È nulla! Quindi L_z è una costante del moto! Non c'è niente di misterioso in tutto questo, naturalmente: L_z è l'espressione, in coordinate cartesiane, della *terza componente del momento angolare*, ed è un fatto noto che in un problema *centrale* (come il moto gravitazionale di un pianeta attorno alla sua stella), che immaginiamo avere un moto sul piano xy (perché secondo un tale sistema di coordinate abbiamo scritto l'hamiltoniana), il momento angolare su quel piano (ovvero la sua componente lungo l'asse z L_z) si conserva, è una costante del moto. Questo esempio, pur semplice, serve per far vedere che abbiamo potuto stabilire dalle sole parentesi di Poisson che una certa grandezza si conserva anche se questo fatto non appariva evidente dall'hamiltoniana stessa e prima ancora di aver scritto le equazioni del moto e provato ad integrarle. Notevole, vero?

La potenza della Meccanica hamiltoniana è tale che essa è diventata in qualche maniera il termine di confronto della Meccanica Quantistica: quando Schrödinger ha dovuto scrivere un'equazione che descrivesse l'evoluzione temporale dello stato di un sistema fisico quantistico (producento l'equazione che porta il suo nome) non ha potuto naturalmente far uso delle equazioni di Hamilton, ma dovendo scegliere una funzione che riassume le proprietà del sistema e che comparisse nella sua equazione ha optato per l'hamiltoniana, sia perché essa ha l'evidente significato fisico di energia totale del sistema, sia perché essa è la funzione che sarebbe stata scelta in Meccanica Classica per la descrizione formale del problema. Nel passaggio alla Meccanica Quantistica, Schrödinger scrive l'hamiltoniana *esattamente come farebbe in Meccanica Classica*, ma poi apporta tre cambiamenti:

- le soluzioni dell'equazione fondamentale del problema (equazioni di Hamilton nel caso classico, equazione di Schrödinger nel caso quantistico) non sono più posizione e velocità del sistema ad ogni istante di tempo (caso classico), ma lo *stato* quantistico del sistema, descritto da una *funzione d'onda*; così facendo, l'hamiltoniana non contiene più in sé le grandezze fisiche soluzione del problema (posizioni e velocità), ma *agisce* tramite esse sulla funzione d'onda del sistema. Matematicamente, l'hamiltoniana si trasforma da una funzione ad un *operatore*, mediante quelle trasformazioni a cui già avevamo accennato che portano le posizioni a restare tali, e gli impulsi a diventare degli operatori di derivazione rispetto alle posizioni, come abbiamo visto parlando dell'equazione di Schrödinger;
- l'equazione fondamentale del problema diventa l'equazione di Schrödinger;
- il ruolo che in Meccanica hamiltoniana è svolto dalle parentesi di Poisson, in Meccanica Quantistica è svolto dai *commutatori*: il commutatore tra due *operatori* F e G è definito come:

$$[F, G] = FG - GF$$

e prende questo nome perché qualora esso si annulli si dice che i due operatori F e G *commutano*, in quanto è indifferente l'ordine con cui li applico (ad una funzione d'onda). In Meccanica Quantistica, saranno *conservate* (ovvero indipendenti dal tempo) quelle osservabili fisiche associate ad operatori che commutano con l'hamiltoniana del problema, e saranno legate dal principio di indeterminazione di Heisenberg (e quindi non osservabili simultaneamente con infinita precisione) quelle osservabili fisiche i cui operatori *non* commutano tra di loro; tra queste, ad esempio, posizione e velocità:

$$[x, p_x] \psi = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x \right) \psi = -i\hbar \left(x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi - x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = i\hbar \psi$$

che, dovendo essere soddisfatta *per ogni* funzione d'onda ψ , implica che

$$[x, p_x] = i\hbar$$

da cui si deduce che, in Meccanica Quantistica, posizione e impulso coniugato non commutano, e quindi per essi vale la relazione di indeterminazione di Heisenberg.

Lasciando da parte per ora i legami con la Meccanica Quantistica, la formulazione hamiltoniana della Meccanica Classica ci ha permesso di scrivere un insieme di equazioni differenziali del primo ordine, che quindi ci offrono una maggiore probabilità di saperle risolvere rispetto a quelle di secondo ordine proposte dalla formulazione newtoniana e da quella lagrangiana, scritte in uno spazio la cui *metrica* tiene conto dei vincoli, se presenti, semplificando formalmente il problema, come avevamo già discusso parlando di Meccanica lagrangiana. Ancora una volta, l'integrazione delle equazioni di hamilton, unitamente alla conoscenza di posizione e velocità del sistema (o dei suoi costituenti) ad un certo istante di tempo ci consente di calcolare con infinita precisione posizione e velocità del sistema (o dei suoi costituenti) ad un qualunque istante di tempo, nel passato o nel futuro.

Ma sarà proprio così?

A presto,

Marco