

# Dal Quark al Quasar

*Pensieri di Fisica, sulla Natura e sull'Universo*

## Funzioni d'onda

Domenica 13 novembre 2005

Caro Amico,

L'affascinante complessità dei sistemi fisici microscopici, governati dalle leggi che abbiamo catalogato sotto il nome di Meccanica Quantistica, viene descritta teoricamente, almeno per i fenomeni non relativistici, con l'equazione di Schrödinger di cui abbiamo parlato nella nostra epistola precedente; sua soluzione dicevamo essere la *funzione d'onda*  $\psi$  del sistema (anche detta *psi* del sistema). Se l'equazione di Schrödinger racchiude, per così dire, tutta la Fisica del sistema, la sua funzione d'onda descrive *ad ogni istante di tempo* il comportamento effettivo del sistema stesso, ed è ad essa che dobbiamo affidarci se vogliamo sapere quali sono le proprietà, ora e in un qualsiasi istante futuro, del sistema che stiamo studiando. È quindi ormai giunto il momento di parlare un po' più nel dettaglio di che cos'è e di quali proprietà e significati abbia la funzione d'onda di un sistema quantistico non relativistico. Come promesso, non proveremo nemmeno a risolvere l'equazione di Schrödinger in un qualche caso concreto, ovvero non calcoleremo mai la funzione d'onda, per non imbarcarci in lunghi conti che qui, per la discussione che abbiamo intavolato, sarebbero poco utili; discuteremo piuttosto delle idee che hanno guidato l'evoluzione della comprensione dei fenomeni quantistici, a partire dai primi anni del XX secolo fino ad oggi, aderendo all'interpretazione più comunemente (anche se non unanimemente) accettata che va sotto il nome di *scuola di Copenhagen*.

Al fine di comprendere che cosa significhi scrivere la funzione d'onda di un sistema quantistico, richiamiamo brevemente i concetti basilari che abbiamo esposto nelle nostre due epistole precedenti:

- l'equazione di Schrödinger rappresenta la Fisica del sistema quantistico, racchiudendo essa tutti i contributi energetici che governano il comportamento fisico del sistema;
- la funzione d'onda è la soluzione dell'equazione di Schrödinger, e racchiude il comportamento effettivo del sistema, deterministicamente noto ad ogni istante di tempo grazie all'equazione di Schrödinger;
- un sistema quantistico è intrinsecamente governato (e pertanto va descritto) da leggi che devono tenere conto di una natura probabilistica dei fenomeni, come mostrato dall'esperimento di Davisson e Germer (e da molti altri ancora di cui non abbiamo discusso); ricordo infatti che, nella variante più complessa di questo esperimento, due "fenditure" nello schermo producono singolarmente delle figure di diffrazione sulla lastra, ma se le fenditure sono mantenute aperte contemporaneamente la figura risultante non è la somma delle figure dovute alle singole fenditure, ma è la figura di diffrazione che compete ad entrambe considerate contemporaneamente, *come se* l'elettrone potesse essere descritto da un'onda che diffrange quando attraversa le fenditure, e come una particella materiale quando incontra la lastra (lasciando su di essa un puntino ben definito in corrispondenza del punto di impatto).

Come conciliare tra di loro tutte queste considerazioni e questi risultati? Ancora una volta, la risposta che daremo non ha un perché definibile *a priori*, ma va piuttosto accettata in quanto efficace nel descrivere i fenomeni fisici noti e nel prevedere accuratamente nuovi fenomeni fisici che possono essere usati per validare la teoria e stabilirne i limiti. L'arbitrarietà che c'è in queste posizioni trova riscontro nell'ampio dibattito che ormai da quasi un secolo si articola attorno all'interpretazione del significato fisico della funzione d'onda di un sistema quantistico, e di cui, dicevamo, la *scuola di Copenhagen* rappresenta solo la versione più largamente accettata.

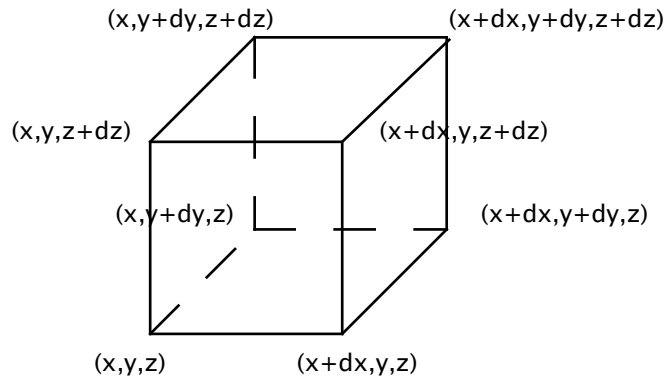
La funzione d'onda di un sistema quantistico va interpretata come una grandezza che esprime l'*ampiezza di probabilità di posizione* del sistema; in maniera equivalente, si può affermare che il *modulo quadro* della *psi* del sistema  $|\psi|^2$  rappresenta la *densità di probabilità di posizione del sistema*. Che vorrà mai dire? Dicevamo nella nostra epistola scorsa, che, ad ogni istante di tempo, la *psi* è funzione delle coordinate spaziali:  $\psi = \psi(x, y, z, t)$ . Una notazione compatta, che useremo talvolta, esprime le tre coordinate

spaziali in un unico simbolo:  $\mathbf{x}$ . Pertanto, con questa notazione,  $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ . L'interpretazione che abbiamo appena dato del significato della funzione d'onda vuol dire che la quantità

$$|\psi(x, y, z, t)|^2 dx dy dz$$

rappresenta la probabilità di trovare il sistema fisico (ad esempio un elettrone), all'istante  $t$ , nell'elemento infinitesimo di volume compreso tra  $(x, y, z)$  e  $(x+dx, y+dy, z+dz)$ , come indicato dalla figura. In altre parole:

- calcolo la funzione d'onda come soluzione dell'equazione di Schrödinger;
- ne calcolo il modulo (non è il semplice *valore assoluto* perché la funzione d'onda è, in generale, una quantità complessa, dal momento che l'equazione di Schrödinger coinvolge grandezze complesse) e lo elevo al quadrato;
- tale quantità, istante per istante e punto per punto dello spazio, rappresenta la *probabilità di trovare il sistema fisico in quel punto dello spazio a quell'istante di tempo*.



Un modo equivalente di esprimere questo concetto è dire che la funzione d'onda di un sistema quantistico va interpretata come un'onda di probabilità. Ma è proprio necessaria tutta questa complicazione? Sì, e vediamo subito perché.

L'esperimento di Davisson e Germer ci insegna che gli elettroni che, ad uno ad uno, attraversano la fenditura nello schermo, contribuiscono a produrre sulla lastra una figura di diffrazione simile a quella di un'onda elettromagnetica che attraversa una fenditura; tuttavia, non è corretto pensare ad un elettrone (o ad un qualunque altro sistema quantistico) come ad un'onda, perché il singolo elettrone, incidendo sulla lastra dell'esperimento di Davisson e Germer, non produce una figura di diffrazione completa (ancorché flebile), ma solo un puntino annerito ben definito; non è nemmeno corretto pensare alla funzione d'onda del sistema quantistico come ad una quantità che esprime le proprietà ondulatorie *collettive* ad esempio di tutti gli elettroni che, col tempo, incidono sulla lastra, perché sappiamo che l'esperimento di Davisson e Germer produce gli stessi risultati anche quando gli elettroni sono inviati attraverso la fenditura e contro la lastra uno per volta, senza che abbiano la possibilità di interagire (e quindi di interferire) l'uno con l'altro; le proprietà ondulatorie della materia che emergono dall'esperimento di Davisson e Germer sono pertanto da attribuire alla singola particella quantistica (un elettrone, in questo caso), e non a fenomeni di tipo statistico derivanti dall'aver un gran numero di particelle interagenti tra di loro. La funzione d'onda non è quindi un'onda di materia, perché il singolo elettrone, raggiungendo la lastra, la annerisce in un punto ben definito (è una *particella*), ma deve essere un'onda di probabilità affinché sia preservata la natura intrinsecamente probabilistica del fenomeno a causa del quale l'elettrone che attraversa la fenditura viene da essa diffratto così che, raggiunto lo schermo, interagirà con esso in un punto appartenente alla figura di diffrazione della fenditura.

È necessario discuterne ancora, perché sicuramente ti sarai reso conto che ci sono ancora troppi punti oscuri. Torniamo allora all'esperimento di Davisson e Germer, per semplicità nella configurazione in cui c'è una sola fenditura. L'elettrone viene emesso da un'opportuna sorgente. L'equazione di Schrödinger descrive la Fisica del sistema, in particolare essa:

- conterrà un termine di energia cinetica del tipo  $p^2/2m$  dovuto al fatto che l'elettrone è stato emesso con una certa velocità dalla sorgente;
- conterrà un opportuno termine di energia potenziale che renderà conto della presenza della fenditura; tale termine di energia potenziale sarà qualche cosa di molto semplice, anche solo un'energia potenziale infinitamente grande in tutti i punti in cui lo schermo è impenetrabile (energia potenziale infinita vuol dire che, per quanto grande sia l'energia cinetica dell'elettrone, esso non potrà mai superare la barriera di potenziale, come una biglia che, lanciata in salita, non supererà mai la vetta perché essa sarà sempre troppo alta), e nulla nei punti in cui lo schermo è forato (fenditura).

La funzione d'onda che è soluzione di questa equazione di Schrödinger, calcolato il suo modulo quadro, descriverà, istante per istante, la probabilità di trovare l'elettrone in un punto dello spazio piuttosto che in un altro. E qui c'è subito un primo, formidabile scoglio concettuale: se immagino che il mio elettrone sia stato emesso da un'opportuna sorgente (che sarà in un punto ben definito dello spazio), e che esso stia viaggiando verso la fenditura, che bisogno ho di invocare una descrizione probabilistica del suo moto? Se l'elettrone fosse un proiettile (una biglia, un sassolino, un treno), le equazioni della dinamica (della cinematica, addirittura) ci permetterebbero di conoscere con precisione assoluta, istante per istante, la sua posizione e la sua velocità; ma un proiettile, una biglia, un sassolino, un treno, passando attraverso una fenditura non producono figure di diffrazione; quindi evidentemente c'è qualche cosa che non va nel trasportare le leggi della dinamica classica ai sistemi quantistici. Una volta che l'elettrone è stato emesso ed è in viaggio verso la lastra con la fenditura, l'equazione di Schrödinger non mi permette di sapere *esattamente dove si trova l'elettrone* ad ogni istante di tempo; mi permette invece di sapere *esattamente* (quindi deterministicamente, non c'è casualità in tutto questo) *con quale probabilità troverò l'elettrone in ogni punto dello spazio*, ad ogni istante di tempo. Ovvero:

- la sorgente emette l'elettrone;
- esso viaggia verso la lastra con la fenditura; non posso sapere esattamente dov'è, ma posso calcolare ad ogni istante, grazie all'equazione di Schrödinger che mi dà la funzione d'onda, la probabilità di trovarlo in un punto piuttosto che in un altro.

È come dire: non so con esattezza dov'è l'elettrone, ma *se facessi una misura della sua posizione*, avrei una certa probabilità di trovarlo qui piuttosto che là. Ripeto: *se facessi una misura della sua posizione*. Vediamo tra poco che cosa vuol dire. Il punto è che, per adesso, la misura della sua posizione non la faccio, lascio che l'elettrone prosegua indisturbato il suo viaggio verso lo schermo con la fenditura.

Ora l'elettrone raggiunge lo schermo. Che cosa succede? Non sappiamo dov'è l'elettrone, sappiamo solo con quale probabilità esso si può trovare in un punto piuttosto che in un altro. Dobbiamo così tenere in considerazione tutte le possibilità:

- l'elettrone, *se misurassi la sua posizione*, potrebbe trovarsi in un punto dello schermo in cui non c'è la fenditura; il suo moto si arresterebbe lì;
- l'elettrone, *se misurassi la sua posizione*, potrebbe trovarsi in un punto dello schermo in cui c'è il bordo della fenditura, e allora urterebbe con esso, attraverserebbe lo schermo dirigendosi verso la lastra fotografica, ma il suo moto sarebbe deviato (per via dell'urto col bordo della fenditura) rispetto al moto che aveva precedentemente;
- l'elettrone, *se misurassi la sua posizione*, potrebbe trovarsi in un punto dello schermo in cui attraversa senza interazioni o urti la fenditura, dirigendosi indisturbato verso la lastra fotografica.

Non sappiamo dov'è l'elettrone, perché *non ne abbiamo misurato la posizione*, quindi che cosa succede? Succede che accadono tutte e tre queste cose assieme: dire che *non abbiamo misurato la posizione dell'elettrone* vuol dire che fino ad ora il suo *stato* è completamente descritto dalla sua funzione d'onda, che ci dice con quale probabilità possiamo trovarlo in un punto dello spazio piuttosto che in un altro; questa conoscenza di tipo probabilistico non vuol dire che l'elettrone si trova in un punto ben preciso dello spazio ma noi, per qualche ragione dovuta alla nostra ignoranza o alla limitatezza dei nostri metodi sperimentali, non sappiamo dov'è; vuole invece dire che l'elettrone *non è in un punto ben preciso dello spazio*, è piuttosto *delocalizzato* nello spazio, in tutti i punti di esso in cui c'è una probabilità (modulo quadro della funzione d'onda) maggiore di zero di trovarlo *se facessimo una misura della sua posizione*. L'elettrone che giunge sullo schermo non arriva là dove lo schermo è impenetrabile, non urta contro il bordo della fenditura e non passa indisturbato attraverso essa; le dimensioni della fenditura sono così piccole (ricordi? Parlando dell'esperimento di Davisson e Germer dicevamo che si ha diffrazione quando la fenditura ha dimensioni confrontabili con la *lunghezza d'onda*) che la funzione d'onda dell'elettrone ha modulo quadro diverso da zero su un volume più grande rispetto a quello occupato dalla fenditura; la funzione d'onda rappresenta un'onda (anche se di probabilità e non di materia) e pertanto viene diffratta dalla fenditura; non ha senso chiedersi se l'elettrone ha interagito o no con lo schermo o col bordo della fenditura, perché l'elettrone non si trova in nessun punto particolare dello spazio, esso è descritto dalla sua funzione d'onda, che viene diffratta dalla fenditura; tale meccanismo di diffrazione è come se tenesse in conto tutte le eventualità possibili, ognuna con la sua probabilità, riguardanti le infinite posizioni diverse in cui potrebbe trovarsi l'elettrone se esso occupasse veramente un punto ben definito dello spazio.

Attraversata la fenditura, la funzione d'onda non cambia di significato, ma cambia la sua forma e la sua evoluzione temporale (perché è entrato in gioco il termine di energia potenziale dello schermo all'interno dell'equazione di Schrödinger), così che *se effettuassimo una misura della posizione dell'elettrone* avremmo una probabilità di trovarlo in un punto dello spazio piuttosto che in un altro, che già tiene conto dell'avvenuta interazione (diffrazione) con la fenditura.

Ma quand'è che facciamo questa benedetta misura della posizione dell'elettrone? Nel momento in cui esso raggiunge la lastra fotografica. Bisogna infatti considerare il concetto di *misura* in senso lato, come un qualunque procedimento atto a rivelare ad esempio la posizione (ma anche altre proprietà, naturalmente) del sistema quantistico in oggetto (l'elettrone, nel nostro caso). La lastra fotografica effettua una misura della posizione dell'elettrone perché essa rivela, tramite il suo annerimento, il punto in cui esso interagisce con l'emulsione fotografica. È bene anche qui ricordare che l'elettrone colpisce la lastra in un punto ben definito, ma che tale punto non è noto *a priori* nemmeno da un essere supremo infinitamente intelligente e senziente: abbiamo visto che la descrizione probabilistica che diamo del sistema quantistico non nasce da una nostra ignoranza del dettaglio di ciò che lo governa, ma è una sua caratteristica intrinseca; fin tanto che è in viaggio verso la lastra, la posizione dell'elettrone *non è nota*, semplicemente perché esso *non ha una posizione*; tutto ciò che ha è una funzione d'onda che indica *la probabilità di trovarlo in un certo punto ad un certo istante se facessimo una misura*. Nel momento in cui la facciamo mediante la lastra fotografica, troveremo l'elettrone *in un punto a caso della lastra stessa*, ma scelto con una probabilità perfettamente determinata dalla sua funzione d'onda; tale probabilità è data al modulo quadro della funzione d'onda, e in virtù del fenomeno di diffrazione sperimentato con la fenditura assume il profilo responsabile della figura di diffrazione osservata nell'esperimento di Davisson e Germer.

Quando l'elettrone giunge sulla lastra fotografica, che effettua su di esso una misura di una sua proprietà (la sua posizione, in questo caso), si dice che la sua funzione d'onda *collassa in un punto*, perché la proprietà che è stata misurata assume, nell'istante in cui si effettua la misura, un valore ben definito tra i valori possibili (finiti o infiniti a seconda dei casi) che aveva prima che la misura venisse effettuata. Vorrei ancora sottolineare, per l'ennesima volta, che qualunque sia la proprietà che la funzione d'onda descrive (ad esempio la posizione dell'elettrone), tale proprietà *non ha un valore definito* fin tanto che essa *non viene misurata*; piuttosto, ci sarà un insieme (finito o infinito) di valori possibili per essa, e il sistema fisico è *come se avesse*, per tale proprietà, ad ogni istante di tempo, tutti i valori possibili per essa, ognuno con la sua probabilità; come tale probabilità evolve nel tempo è descritto in maniera perfettamente deterministica dall'equazione di Schrödinger; ed è solo con un processo di misura che finalmente la proprietà misurata assume un valore ben definito, all'interno di quelli possibili, con una probabilità data dal modulo quadro della funzione d'onda.

Concludo esemplificando quanto detto sopra con un esempio sconvolgente perché tratto da quella che potrebbe essere un'esperienza quotidiana, che naturalmente è governata da leggi ben diverse da quelle della Meccanica Quantistica, e che intenzionalmente sconcerta proprio per mettere maggiormente in evidenza la peculiarità dei fenomeni microscopici. Immaginiamo che io abbia due fogli di carta, uno bianco e uno nero. Ne prendo uno a caso, lo metto in una busta e te lo spedisco. Quando tu lo ricevi, *prima di aprire la busta*, già sai che avrai il 50% di probabilità di trovare un foglio bianco e il 50% di trovarne uno nero, perché sai le seguenti cose:

- in origine c'erano due fogli, uno bianco e uno nero;
- ne ho messo uno a caso nella busta;
- il foglio che ho messo nella busta è lo stesso che troverai quando aprirai la busta.

In un mondo governato dalle leggi della Meccanica Quantistica questo esperimento sarebbe stato molto diverso: io avrei avuto per le mani *un solo* foglio di carta, *avente il 50% di probabilità di essere bianco e il 50% di essere nero*. Tale probabilità non nasce dal fatto che *non so il colore del foglio*, ma dal fatto che il foglio *non ha un colore finché qualcuno non lo misura*; diciamo che, potendo essere sia bianco che nero (con probabilità uguale), la funzione d'onda del foglio è una *sovrapposizione* dei due stati *bianco* e *nero*. Metto il foglio nella busta e te lo mando. Quando tu lo ricevi, *prima di aprire la busta*, già sai che avrai il 50% di probabilità di trovarlo bianco e il 50% di trovarlo nero, perché sai le seguenti cose:

- gli *stati* di foglio *bianco* e foglio *nero* sono equiprobabili nella funzione d'onda del foglio;

- quando aprirai la busta e osserverai il colore del foglio (operazione di *misura*), la funzione d'onda del foglio *collasserà* in uno dei due stati (*bianco* o *nero*), ognuno con la sua probabilità (che in questo esempio è la stessa per entrambi);
- nessuno di noi ha modo di sapere il colore del foglio *prima di misurarlo* perché il foglio *non ha un colore definito* finché esso non viene misurato.

Se ti gira la testa e sei turbato da tutto questo, allora capirai bene perché, a distanza di quasi un secolo dalle prime formulazioni della Meccanica Quantistica, l'interpretazione data dalla *scuola di Copenhagen*, che qui abbiamo sommariamente descritto, ancora è oggetto di profonde riflessioni e critiche; eppure, ancora nessuna descrizione ed interpretazione alternativa è stata più efficace di quella qui presentata, né ha saputo reggere il test, inappellabile, della verifica sperimentale.

La natura probabilistica delle funzioni d'onda e il ruolo fondamentale del processo di misura per determinare il valore delle quantità fisiche *osservabili* di un sistema quantistico sono all'origine di ulteriori comportamenti sconcertanti della Natura alle scale microscopiche, di cui ci occuperemo ancora nelle nostre prossime lettere.

A presto,

Marco