

Dal Quark al Quasar

Pensieri di Fisica, sulla Natura e sull'Universo

Le equazioni di Maxwell IV

Domenica 24 agosto 2008

Caro Amico,

al fine di affrontare e comprendere il significato fisico della quarta equazione di Maxwell, è necessario ricapitolare brevemente forma e contenuti delle prime tre. La prima, anche detta Teorema di Gauss, asseriva che le *sorgenti* del campo elettrico sono le cariche elettriche, di segno positivo o negativo. In forma differenziale, tale affermazione era espressa mediante un opportuno operatore matematico, detto *divergenza*, che risultava essere diverso da zero in tutti e soli i punti dello spazio ove fosse localizzata una certa *densità* di carica elettrica. La seconda equazione di Maxwell faceva uso del medesimo operatore *divergenza*, ma lo applicava al campo magnetico; il risultato era nullo in *ogni* punto dello spazio, a sostegno dell'idea che non esistono *cariche* di campo magnetico, o *monopoli*, che lo generano. La terza equazione di Maxwell, o *legge dell'induzione*, faceva uso di un altro operatore matematico, denominato *rotore*, che applicato al campo elettrico affermava che esso è *irrotazionale*, ovvero il suo rotore è ovunque nullo, se a generarlo sono le cariche elettriche di cui al Teorema di Gauss. Un campo irrotazionale è anche detto *conservativo*, a richiamare il fatto che il lavoro che si può produrre mediante questo campo dipende solo dalle posizioni dei punti di partenza e di arrivo nello spazio tra i quali si muove la "carica esploratrice" incaricata di fare o subire lavoro, ma non dal percorso compiuto. Se i punti iniziale e finale coincidono, il percorso compiuto è un ciclo chiuso, e il lavoro totale prodotto è zero. Tuttavia, la legge dell'induzione introduceva un importante elemento di novità: qualora nello spazio ci sia un campo magnetico *variabile nel tempo*, esso è in grado di produrre un campo elettrico *non* conservativo, ovvero a rotore diverso da zero, mediante il quale si può produrre lavoro. È il principio di funzionamento della dinamo o dell'alternatore: una qualche forza meccanica (del vapore, l'acqua in caduta lungo una condotta forzata, la ruota di una bicicletta mantenuta in movimento con le nostre pedalate, ecc.) mette in rotazione dei magneti (ad esempio) rispetto a delle spire di filo elettrico avvolto; il campo magnetico *concatenato* con queste spire di filo elettrico risulta essere variabile (periodicamente) nel tempo, in virtù del moto circolare relativo tra questi due elementi. Ai capi degli avvolgimenti si genera quindi una forza elettromotrice indotta, o se preferisci un campo elettrico, *non* conservativo, che infatti può essere utilizzato per produrre lavoro (distribuire corrente elettrica a case e industrie, o più banalmente accendere la lampadina del faro della bicicletta).

Non fosse per altro che per appagare il nostro senso estetico, saremmo portati a pensare che, per simmetria, la quarta equazione di Maxwell, come la terza, debba fare uso dell'operatore *rotore*, applicato questa volta al campo magnetico. Sorprendentemente, è proprio così. Ma in realtà non dovremmo meravigliarci affatto, poiché lo strettissimo legame tra campi elettrici e campi magnetici di fatto ci forza a trattarli con equazioni che, inevitabilmente, si richiamano l'una con l'altra. Se la terza equazione di Maxwell iniziava a far vedere il legame esistente tra campo elettrico e campo magnetico, la quarta, che ora enunceremo, lo rende ancora più esplicito.

In forma differenziale, e sempre *nel vuoto*, quindi immaginando che non vi sia materia nello spazio che prendiamo in considerazione, la quarta equazione di Maxwell, in condizione *statica*, si scrive come segue:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

È necessario fare qualche precisazione:

- abbiamo indicato il campo magnetico con **H**, ma se ricordi in occasione della terza equazione di Maxwell l'avevamo indicato con **B**, e nel caso della seconda l'avevamo indicato ancora con **H**. Non si tratta di errori tipografici; **B** ed **H**, almeno nel vuoto, sono grandezze proporzionali: $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, dove μ_0 ti ricordo essere la cosiddetta *permeabilità magnetica del vuoto*, e il suo valore è esattamente pari a $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m ed è determinato dalla definizione dell'unità di intensità della corrente elettrica: l'ampère;

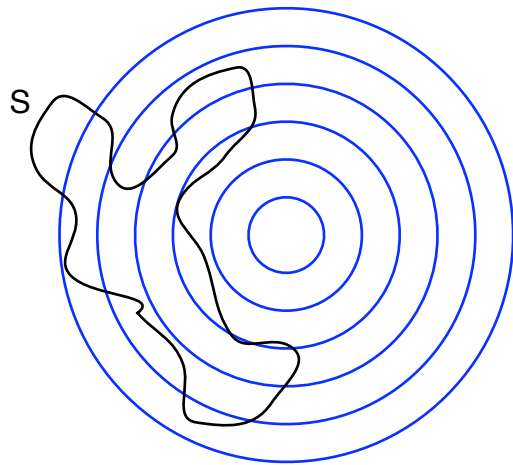
- \mathbf{J} è invece la *densità di corrente* elettrica che si riscontra nello stesso punto dello spazio in cui si desidera calcolare il rotore del campo magnetico.

Densità di corrente elettrica? Che vuol dire? Non è effettivamente facile da visualizzare. Siamo abituati, piuttosto, a pensare ad una corrente elettrica come ad un flusso di cariche elettriche (ad esempio elettroni) che percorre un filo conduttore; siamo, per dirla più matematicamente, maggiormente propensi a pensare alla corrente elettrica in forma *integrale*, piuttosto che in forma differenziale. Ecco perché anticipiamo subito la quarta equazione di Maxwell, sempre nel caso statico, nella sua forma integrale:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

che si legge dicendo che “la circuitazione del campo magnetico lungo un percorso chiuso è pari al flusso della densità di corrente attraverso la superficie delimitata dal medesimo circuito chiuso”. Paroloni. Ma dobbiamo assolutamente cercare di capire che cosa vogliono dire. Giova ricordare che, come sempre, il passaggio dalla forma differenziale alla forma integrale delle varie equazioni di Maxwell può e deve essere fatto mediante rigorosi passaggi matematici; qui li abbiamo omessi, perché anche se interessanti non avrebbero aggiunto nulla al discorso fisico che ci accingiamo a fare, e ci avrebbero invece costretti a lunghe divagazioni.

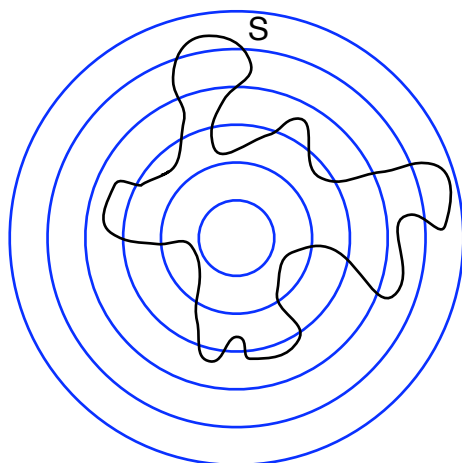
Per capire il significato della quarta equazione di Maxwell nella sua forma integrale iniziamo ad esaminarla pezzo per pezzo. Abbiamo già detto, con la seconda equazione di Maxwell, che le linee di campo magnetico \mathbf{H} sono linee *chiuse*. Ma che cos'è la *circuitazione* del campo magnetico? Immaginiamo una regione di spazio, in cui vi sia un certo campo magnetico; per semplicità immaginiamo che le sue linee di campo siano delle circonferenze (che sono linee chiuse). Scegliamo quindi un percorso assolutamente *qualunque*, ma *chiuso* anch'esso, nella medesima regione di spazio. Nella figura qui di fianco, le linee blu sono le linee di campo magnetico, mentre la curva chiusa nera è il percorso *qualunque* che abbiamo scelto. Calcolare la *circuitazione* del campo magnetico vuol dire percorrere la curva S in un certo verso (a scelta, ad esempio antiorario) in modo da compiere un giro completo, e punto per punto, ad *ogni* punto, moltiplicare il cammino percorso (ovvero il passettino infinitesimo $d\mathbf{l}$) col valore in quel punto lì del campo magnetico \mathbf{H} . Poiché di quantità vettoriali si tratta, il prodotto sarà in realtà un prodotto *scalare*, ma questo, almeno a questo stadio, è un dettaglio che ci interessa fino ad un certo punto. Compiuto un giro completo, avremo calcolato la *circuitazione* del campo magnetico, ovvero la somma di tutti i valori che il campo magnetico assume *lungo il percorso chiuso* S , proiettati parallelamente alla tangente punto per punto di S ; poiché abbiamo compiuto un giro completo o un *circolo*, ecco il termine *circuitazione*.



Come si vede dalla figura, il cammino chiuso S delimita una regione di spazio, ovvero una *superficie*. Possiamo calcolare allora anche il secondo membro della forma integrale della quarta equazione di Maxwell (statica), che è il *flusso* di un certo vettore \mathbf{J} attraverso la superficie S delimitata dal percorso chiuso S (usiamo lo stesso simbolo per identificare tanto il contorno della superficie, quanto la superficie stessa) lungo il quale abbiamo calcolato la circuitazione di \mathbf{H} . Calcolare il flusso di un vettore ti ricordo vuol dire “disegnare” punto per punto, negli infiniti punti della superficie S , il vettore in questione, proiettarlo lungo la normale (perpendicolare), punto per punto, alla superficie S stessa, e sommare i valori così ottenuti. L’operazione sembra complicata, ma intuitivamente è una cosa che conosciamo bene: pensa ad un tubo in cui scorre dell’acqua; prendi una sezione di quel tubo, e verifica che cosa fa l’acqua: se non scorre, anche se il tubo è pieno, non c’è flusso; se scorre verso destra, ci sarà un flusso proporzionale a quanta acqua passa (in qualche misura proporzionale al modulo del suo vettore velocità); se scorre verso sinistra, ancora ci sarà un flusso, ma il segno sarà opposto. Se per tua imperizia scegli una sezione longitudinale del tubo (anziché trasversale), l’acqua, anche se scorre, fluisce parallelamente alla sezione scelta, e quindi non vi sarà mai flusso che attraversa la superficie selezionata (il prodotto scalare tra il vettore che associamo al moto dell’acqua, ovvero la sua velocità, e la normale alla superficie scelta è nullo, perché le loro direzioni sono perpendicolari). Orbene, è il flusso del vettore *densità di corrente elettrica* che dobbiamo calcolare a secondo membro della quarta equazione di Maxwell statica in forma integrale.

Una *densità*, di qualunque cosa sia, quando la si “integra” su una superficie o su un volume (a seconda che fosse una densità superficiale o volumica) restituisce la grandezza associata. Ovvero: la densità di corrente elettrica \mathbf{J} , integrata lungo la superficie S in modo da calcolarne il flusso, restituisce la corrente elettrica che “attraversa” la superficie S . Non abbiamo disegnato fili conduttori o altro nella figura della pagina precedente: potrebbero esserci come no, una corrente elettrica può “viaggiare” in molti modi diversi, non è di questo che ci occupiamo ora. Ma il secondo membro dell’equazione che stiamo trattando ci richiede di calcolare, punto per punto di S , quanta corrente elettrica passa di lì (perpendicolarmente a quel punto di S), prendere tale valore con un segno opportuno (definiremo positiva la corrente elettrica che fluisce in un certo verso e negativa nel verso opposto), sommare tali valori di corrente elettrica punto per punto di S , e il risultato finale è il secondo membro dell’equazione di Maxwell. Ora dobbiamo confrontare il primo membro col secondo membro, ovvero la circuitazione di \mathbf{H} col flusso di \mathbf{J} .

Si aprono due scenari interessanti. Il primo scenario è quello rappresentato sempre nella figura della pagina precedente. È evidente che in quella regione di spazio che stiamo esaminando c’è un campo magnetico \mathbf{H} . Esso è diverso da zero. Sono le linee blu circolari. Eppure, se facessimo per bene i conti, con tutti i passaggi matematici ben fatti, tenendo conto come si deve della *forma* delle linee di \mathbf{H} (circonferenze) e della forma del percorso S , scopriremmo che il primo membro dell’equazione, ovvero la circuitazione del campo magnetico, è pari a zero. Zero. Questo vuol dire che anche il secondo membro dell’equazione deve essere nullo. Affinché il flusso di \mathbf{J} sia nullo attraverso la superficie S , occorre che attraverso S ci sia tanta corrente elettrica che fluisce in un verso, quanta ce n’è che fluisce nel verso opposto (di fatto annullandosi), oppure che non ce ne sia proprio in alcun punto di S . Ecco il primo scenario: c’è un campo magnetico non nullo, ma un percorso chiuso S come quello della figura della pagina precedente ne dà una circuitazione nulla, che risulta in un flusso di corrente elettrica attraverso la superficie S nullo anch’esso.



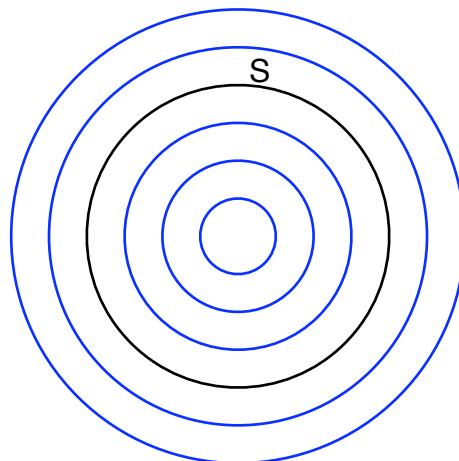
Ma questo scenario non è l’unico possibile. Ce n’è un altro, che è quello rappresentato qui di fianco. La vedi la differenza rispetto al caso precedente? Ovviamente sì. Questa volta il percorso chiuso S , sempre *qualunque*, “circonda” il centro delle linee di campo di \mathbf{H} , quelle circonferenze blu. Prima non lo faceva. Orbene, in questa configurazione, se facessimo per bene i conti della circuitazione del campo magnetico, nuovamente tenendo conto della forma delle linee di campo, e della forma del percorso S , scopriremmo che il primo membro della quarta equazione di Maxwell *statica* non è più nullo; è invece diverso da zero. Ma quanto vale? Fare il conto nel caso generico è scomodo, e anche se si può fare è un’inutile complicazione. Questa equazione ci dice che la circuitazione di \mathbf{H} la possiamo calcolare lungo un *qualunque* percorso S . Allora, perché non scegliere un percorso chiuso S con le stesse caratteristiche di quello raffigurato qui di

fianco (ovvero che circonda il centro delle circonferenze delle linee di \mathbf{H}), ma con una forma che ci renda più agevole fare i conti? Lo possiamo fare, perché il risultato che otteniamo deve essere valido *qualunque* sia il percorso S scelto. E qual è un siffatto percorso la cui forma ci agevola i conti? Presto detto: una circonferenza *concentrica* con le linee di campo magnetico.

La configurazione è allora quella raffigurata qui a destra. Lungo il percorso S , il campo magnetico ha un valore H che è costante (direzione e verso sono tangenti ad S , ad esempio sempre in senso antiorario). Il primo membro della quarta equazione di Maxwell statica è allora particolarmente facile da calcolare. Poiché \mathbf{H} è costante e *sempre* tangente ad S (condizione che ci serve perché sia costante anche il prodotto scalare), “esce” dall’integrale. Ciò che resta è

$$H \oint dl$$

dove l’integrale non è altro che la *lunghezza* del cammino S . Essendo una circonferenza, è facile da calcolare: 2π moltiplicato per il raggio della circonferenza stessa. Ecco



allora che il primo membro della quarta equazione di Maxwell statica è pari a $2\pi rH$. Ma che dire del secondo membro?

Poiché il primo è diverso da zero (e ha il valore su indicato), anche il secondo dovrà essere diverso da zero (ed avere il valore su indicato). Per semplicità (potremmo fare il caso generale, ma come al solito siamo interessati a capire che cosa succede, più che a fare un corso di Fisica Generale), immaginiamo che la corrente di cui ci dobbiamo occupare fluisca perpendicolarmente al piano del foglio, ovvero attraverso la superficie S (ora circolare) perpendicolarmente ad essa; questo ci aiuta, poiché ci permette di far sparire il prodotto scalare a secondo membro dell'equazione di Maxwell facendolo diventare un ben più semplice prodotto algebrico. Il flusso di \mathbf{J} , allora, non sarà altro che la *somma* algebrica di tutti i valori di corrente elettrica che fluiscono lungo la superficie (circolare) delimitata da S , moltiplicata per detta superficie; se I è allora la *corrente totale* che fluisce attraverso la superficie S , tale prodotto varrà $I\pi r^2$. E poiché il primo membro è uguale al secondo:

$$2\pi rH = I\pi r^2$$

da cui

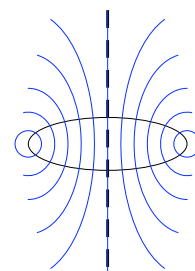
$$I = \frac{2H}{r}$$

Ma dunque c'è una corrente elettrica diversa da zero che fluisce attraverso la superficie S ! Ma il percorso S , dicevamo, è *qualunque*. Allora cambiamolo. Manteniamolo sempre una circonferenza, ma rendiamola molto più piccola. Così piccola che il suo raggio sia infinitesimo. E spostiamo questa circonferenza S infinitesima un po' ovunque nel piano delle figure delle pagine precedenti. E ogni volta che portiamo la circonferenza infinitesima S da qualche parte, calcoliamo di nuovo il primo e il secondo membro della quarta equazione di Maxwell. È un lavoraccio, faticosissimo. Ma in realtà non abbiamo bisogno di farlo, perché qualunque sia la posizione della circonferenza infinitesima S , solo uno dei due scenari analizzati si realizzerà: o la circonferenza infinitesima S non circonda il centro delle circonferenze di \mathbf{H} , e allora il primo membro dell'equazione di Maxwell è nullo e quindi anche I è pari a zero. Oppure, la circonferenza infinitesima S circonda il centro delle circonferenze di \mathbf{H} , e allora la circuitazione è diversa da zero e la corrente elettrica ha il valore su indicato. Ma poiché la circonferenza è infinitesima, l'unico modo che ha per circondare il centro delle linee di campo di \mathbf{H} è essere concentrica con esse. Ovvero. L'unico punto in cui fluisce una corrente elettrica è il centro delle circonferenze delle linee di campo di \mathbf{H} . E fluisce perpendicolarmente al piano del foglio.

Avremmo potuto complicarci la vita e scegliere delle linee di \mathbf{H} che non fossero delle circonferenze. Avremmo potuto, e in un corso di Fisica Generale avremmo dovuto farlo. Il discorso sarebbe stato più complicato, ma saremmo sempre giunti alle medesime conclusioni: la circuitazione del campo magnetico \mathbf{H} è proporzionale alla corrente elettrica che fluisce attraverso la superficie delimitata dal percorso chiuso lungo il quale è stata calcolata la circuitazione. Se tale percorso "racchiude" della corrente elettrica, la circuitazione è diversa da zero, altrimenti è nulla.

Questo lungo discorso ci porta finalmente a rispondere alla domanda che ci portiamo dietro da tanto tempo. Che cos'è che genera il campo magnetico? Assodato che non sono delle *cariche* magnetiche (perché la seconda equazione di Maxwell ce lo impedisce), quali sono i *generatori* del campo magnetico? Ora la risposta ce l'abbiamo: le correnti elettriche. Se non c'è una corrente elettrica da qualche parte che fluisce, la quarta equazione di Maxwell *statica* ci assicura che non importa come scegliamo il percorso S , ma la circuitazione di \mathbf{H} sarà sempre nulla. E se essa è nulla *sempre*, se *non esiste* un percorso S lungo il quale è diversa da zero, allora \mathbf{H} è identicamente nullo. Elimina le correnti elettriche, e non avrai campi magnetici.

Discutendo della seconda equazione di Maxwell, però, avevamo anche detto che apparentemente erano non già le *cariche* magnetiche (in analogia con le cariche elettriche), ma i *dipoli* magnetici (calamite infinitesime) a generare i campi magnetici, e a dare loro quelle belle linee di flusso solenoidali (ovvero sempre chiuse). Ci eravamo sbagliati? No, e la risposta ce la dà Ampère, mediante il suo famoso *teorema di equivalenza*. Ampère ci invita a prendere in considerazione una corrente elettrica che fluisce non già attraverso un filo elettrico rettilineo, ma attraverso una spira chiusa, un anello. Le linee di campo magnetico generate da una corrente siffatta si possono calcolare, e disegnare. Un tentativo di rappresentarle è dato nella figura qui di fianco. La



linea nera è la spira lungo la quale fluisce la corrente elettrica; la linea tratteggiata è il suo asse. Le linee blu sono rappresentazioni del campo magnetico generato da questa corrente elettrica. Se rendi sempre più piccola questa spira, fino a farla diventare infinitesima, il campo magnetico da essa generato coincide col campo magnetico prodotto da un *dipolo* magnetico, ovvero da una calamita infinitesima. C'è assoluta *equivalenza* tra *dipoli* e spire percorse da corrente. Così come una spira non può essere frammentata in due metà, una delle quali corrisponda al "polo Nord" di una calamita e l'altra al "polo Sud", così i *dipoli* magnetici non possono essere spezzati in due *monopòli*. A generare il campo magnetico sono *sempre* delle correnti elettriche, anche quando per ragioni di rappresentazione, o per aiutare il nostro intuito, pensiamo a calamite o *dipoli*.

Fino ad ora abbiamo ribadito più volte che l'equazione di Maxwell che abbiamo scritto in queste pagine è *statica*. L'abbiamo detto più volte perché è importante, naturalmente. Abbiamo già visto con la legge dell'induzione, infatti, che un conto è parlare di campi che *non* dipendono dal tempo, un conto ben diverso è invece prendere in considerazione campi che variano con esso. La legge dell'induzione, in particolare, ci ricordava che un campo magnetico variabile nel tempo è in grado di generare (*indurre*) un campo elettrico anch'esso variabile nel tempo, ma *non* conservativo, ovvero in grado di compiere lavoro ciclicamente. Ora sappiamo come generare un campo magnetico variabile nel tempo: mediante una corrente elettrica alternata. Ma non è finita qui.

Nella sua forma *dinamica*, la quarta equazione di Maxwell aggiunge un termine al secondo membro, che diventa così più ricco: riscriviamola in forma differenziale:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Innanzitutto una precisazione: così come per il campo magnetico era $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$, anche per il campo elettrico è $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E}$. L'utilizzo dei campi \mathbf{B} e \mathbf{D} è del tutto superfluo nel vuoto, se vogliamo, dal momento che esiste coi rispettivi campi \mathbf{H} ed \mathbf{E} una semplice legge di proporzionalità, ma diventa cruciale quando si desidera riscrivere le equazioni di Maxwell in presenza di materia, circostanza in cui le cose si complicano e non poco. Ma non possiamo occuparcene in questa occasione, e rimandiamo l'approfondimento ad un'altra volta.

Il termine aggiuntivo a secondo membro della quarta equazione di Maxwell ci assicura che c'è un altro modo per produrre un campo magnetico: non una corrente elettrica, ma un campo elettrico *variabile nel tempo*. E così il ciclo si chiude: un campo magnetico variabile nel tempo genera un campo elettrico variabile nel tempo. E un campo elettrico variabile nel tempo genera un campo magnetico variabile nel tempo. Le due cose sono inseparabili. Non importa se stai usando una corrente alternata per generare un \mathbf{H} alternato e ottenere così un \mathbf{E} alternato, o se stai facendo oscillare delle cariche elettriche lungo un conduttore mediante una tensione alternata per produrre come conseguenza un \mathbf{H} alternato: i campi elettrico e magnetico, *statici*, esistono in quanto tali, ma quando uno dei due lo rendi funzione del tempo, ti ritrovi anche con l'altro. Sono inscindibili, perché l'*elettromagnetismo* è un'unica collezione di fenomeni, e l'elettrostatica e la magnetostatica non sono che casi speciali, anche se non sempre banali, di esso.

Ed ecco anche svelato l'arcano legame tra la permeabilità magnetica del vuoto μ_0 e la definizione dell'ampère, l'unità di misura dell'intensità della corrente elettrica: poiché sono le correnti elettriche a generare i campi magnetici, questo legame ora non ci sorprende più. Nella libertà che abbiamo di decidere le costanti di proporzionalità, pur col vincolo ovviamente di mantenere coerenza all'interno del nostro sistema fisico, scegliamo, *per definizione*, che μ_0 valga $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m; e questo lega una volta per tutte il campo magnetico con la definizione dell'ampère.

Ora che l'intimo legame tra campo elettrico e campo magnetico è stabilito; ora che sappiamo che sono le cariche elettriche a generare il campo elettrico, ed è il *moto* delle cariche elettriche (una corrente elettrica) a generare il campo magnetico; ora che sappiamo che variare nel tempo l'uno comporta inevitabilmente variare nel tempo anche l'altro; siamo pronti per accompagnare Hertz in una delle più grandi intuizioni di tutti i tempi, e in una delle più impressionanti rivoluzioni tecnologiche di cui l'umanità sia stata protagonista.

A presto,

Marco