Le equazioni di Maxwell III

Domenica 30 settembre 2007

Caro Amico,

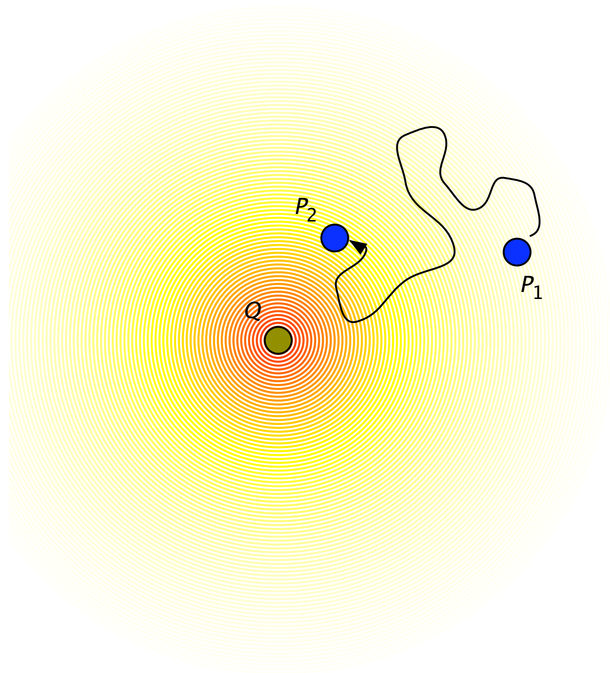
la seconda Equazione di Maxwell ha dato poche risposte, ma in cambio ha sollevato molte domande. Ci ha permesso infatti di capire che il campo magnetico è di natura fondamentalmente diversa dal campo elettrico, ma non ci ha permesso di capire da che cosa origina, e ha soprattutto aperto uno squarcio su un legame, quello tra correnti e campi magnetici, che non ha però contribuito a chiarire o ad approfondire. Ma ora che questo squarcio è aperto, che una prima visione confusa del mondo che ci aspetta al di là di esso è davanti ai nostri occhi, non possiamo fare altro che andare oltre, e cercare di distinguere un po' meglio i contorni di una realtà che si preannuncia ricca di novità e sorprese. Questo cammino l'ha fatto Maxwell per noi, e naturalmente prima di lui numerosi apripista hanno saputo cogliere e interpretare gli indizi che la Natura, sottoposta alle domande del ricercatore, ha disseminato. E questi indizi iniziarono ad apparire nel XIX secolo, quando un po' per caso, un po' per curiosità, ci si rese conto che le proprietà *statiche* del campo elettrico (prima Equazione di Maxwell) e del campo magnetico (seconda Equazione di Maxwell) non erano che l'inizio dell'avventura. Che cosa succedeva se, in qualche maniera, campi elettrici e magnetici erano forzati a mutare nel tempo?

Tra i pionieri in questo filone di ricerca c'era Michael Faraday, che non senza le solite ostilità da parte di una fetta del mondo accademico dell'epoca si lanciò con entusiasmo, genialità e assenza di pregiudizi nello studio di quei fenomeni che Hans Christian Ørsted aveva iniziato a mostrare al mondo, e che presto sarebbero entrati a far parte della disciplina nota come "elettromagnetismo".

Col senno di poi, e grazie alla monumentale opera di risistemazione formale operata da Maxwell, la legge di cui parliamo, anche nota come legge di Faraday-Neumann-Lenz o terza Equazione di Maxwell, è una delle leggi più importanti e più sorprendenti della Fisica Classica; la legge grazie alla quale esiste la tecnologia moderna, la legge se non avessimo compreso la quale saremmo ancora fermi ai motori a vapore e al lavoro animale. Vediamola un po' più nel dettaglio.

Immaginiamo di avere una certa regione di spazio in cui ci sia un campo magnetico **B**. Ancora non sappiamo come si genera un campo magnetico (per lo meno ancora non lo sappiamo formalmente), ma ammettiamo che ci sia. In qualche maniera, anche qui non è ancora importante sapere come facciamo, assumiamo che questo campo magnetico dipenda dal tempo: $\mathbf{B}=\mathbf{B}(t)$. Ovvero: mi metto in un certo punto dello spazio con uno strumento in grado di misurare **B**, sto fermo lì, e mi accorgo che col passare del tempo **B** cambia di "valore" (il campo magnetico è un vettore, ed è per questo che ho virgolettato il termine "valore": la variazione di **B** può riguardare la sua itensità, o modulo, ma anche la sua direzione, ad esempio, o entrambi). Che cosa posso aspettarmi che succeda?

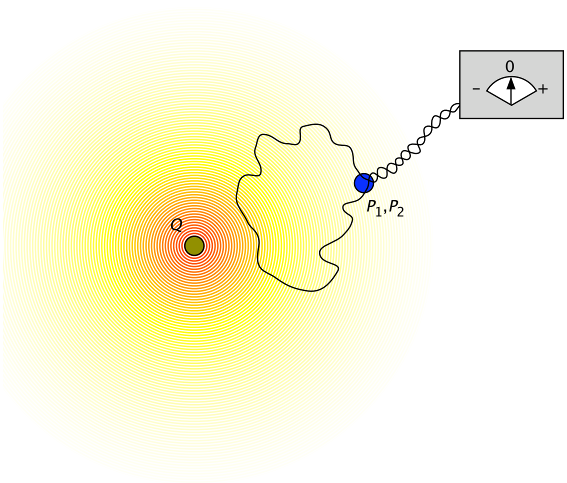
In realtà non succederà un bel niente, a meno che io non predisponga accuratamente le cose in modo tale da poter rilevare degli effetti dovuti a questa variazione temporale del campo magnetico. Ad esempio posso preparare una spira, un anello di filo elettrico (isolato), ai cui capi collegherò un dispositivo capace di misurare una *differenza di potenziale*, o una *tensione elettrica*. Qui non abbiamo definito che cosa sia una differenza di potenziale (che poi è quella grandezza che si misura in volt), e allora è il caso di spenderci due parole, anche senza andare nei dettagli della matematica. Abbiamo visto che un campo elettrico è la proprietà dello spazio dovuta al fatto che da qualche parte ci sono delle cariche elettriche (positive o negative) che *generano* detto campo. Abbiamo anche visto che la direzione del campo elettrico procede radialmente rispetto alla carica generatrice, il verso è entrante o uscente a seconda del segno (negativo o positivo) della carica, e l'intensità decresce secondo una certa legge (quadratica) all'aumentare della distanza dalla carica generatrice. Pertanto, se mi pongo ad una certa distanza d_1 dalla carica generatrice, misurerò nello spazio un certo campo elettrico di intensità E_1. Poi posso piazzarmi ad una certa distanza d_2 dalla carica generatrice, e lì misurerò un campo elettrico di intensità diversa, E_2. Senza pretesa di rigore formale, possiamo esprimere questa variazione del campo elettrico con la distanza dalla carica generatrice usando un'unica quantità, detta *potenziale elettrico*, e usualmente indicata col simbolo V, che è in qualche misura proporzionale alla differenza E_2-E_1 e alla distanza d_2-d_1. Matematicamente diremo che il campo elettrico è il *gradiente*, cambiato di segno, del potenziale.



C'è un aspetto interessante in tutta questa parentesi sul significato del potenziale elettrico, e risiede nel concetto di *conservatività* del campo elettrico. Immaginiamo una situazione come quella della figura qui di fianco, in cui una carica sorgente Q genera un campo elettrico nello spazio circostante, e si individuano due punti P_1 e P_2 posti a distanza diversa da Q. L'intensità del campo elettrico è rappresentata, graficamente, da un *gradiente* di colore (guarda caso, e non è un caso, stiamo usando lo stesso termine, "gradiente", che abbiamo usato per il potenziale elettrico). Ci troviamo inizialmente nel punto P_1, ove abbiamo una certa intensità E_1 del campo elettrico, e ci spostiamo nel punto P_2, dove abbiamo un'altra intensità E_2. Abbiamo detto che passare da un punto ad un altro, posti a distanze diverse dalla carica generatrice, comporta la possibilità di calcolare una *differenza di potenziale elettrico* tra i due punti P_1 e P_2. Ma questa differenza di potenziale elettrico dipende da *come* mi sposto tra P_1 e P_2? Dipende dal percorso che faccio (uno degli infiniti possibili percorsi è rappresentato dalla linea curva in figura)? No, non dipende. Dati il punto di partenza e il punto di arrivo, la differenza di potenziale elettrico tra di essi dipende *solo* da dove si trovano, e cioè dalla loro distanza rispetto alla carica generatrice (e quindi dal valore del campo elettrico in essi), e *non* dal percorso che faccio per andare dal punto di partenza al punto di arrivo. Una conseguenza importante di questo è che se il punto di partenza e il punto di arrivo coincidono, non importa quanto lungo e tortuoso sia il cammino che percorro per andare e tornare nel punto scelto, ma alla fine la differenza di potenziale sarà zero. Questa proprietà si esprime, matematicamente, con la formula:

$$rot\ \vec{E} = 0$$

che, a parole, afferma che il campo elettrico è *irrotazionale* o *conservativo* (l'operatore *rot* è un operatore matematico denominato "rotore" e che qui non esprimeremo in forma analitica). Una conseguenza diretta di questa proprietà di conservatività è che non è possibile produrre lavoro (e quindi realizzare una macchina ciclica che faccia con continuità qualche cosa di utile) mediante un campo elettrico statico e una carica elettrica esploratrice che si muove nello spazio (là dove c'è il campo elettrico) realizzando un percorso *chiuso* (così che alla fine di un ciclo la macchina sia pronta per ricominciare da capo, indefinitamente).



Se ora immaginiamo che la linea curva della figura precedente non sia solo un "cammino" percorso dallo sperimentatore (o dal suo "strumento di misura", che potrebbe anche solo essere una carica esploratrice, come un elettrone), ma un filo elettrico, e se immaginiamo che ai due capi del filo, ovvero in P_1 e P_2 siano collegati i terminali di un misuratore di tensione (*voltmetro*), verificheremmo che la tensione misurata dallo strumento dipenderà dalla posizione di P_1 e P_2 ma *non* dalla lunghezza del filo elettrico e di quanto contorto o aggrovigliato esso sia. Se P_1 e P_2 coincidono, il filo elettrico definisce una *spira* (rappresentata nella figura qui a sinistra), ai cui capi, quando ci si collega un voltmetro, non c'è alcuna differenza di potenziale (perché i due punti di partenza e di arrivo coincidono). Ma per tornare alla domanda iniziale, che cosa succede se nella stessa regione di spazio c'è un campo magnetico *variabile* nel tempo? Se tale campo magnetico ha linee di campo *concatenate* con la spira formata dal filo elettrico, ovvero che attraversano la superficie da esso delimitata, allora il voltmetro collegato ai capi della spira inizierà a segnare alternatamente una differenza di potenziale positiva e negativa, con lo stesso periodo con cui oscilla nel tempo il campo magnetico **B**. Tali linee di campo si dicono *concatenate* con la spira perché, come ricorderai dalla discussione sulla seconda Equazione di Maxwell, il campo magnetico è solenoidale, ovvero le sue linee di campo sono chiuse; una spira di filo elettrico è un anello (quindi un contorno chiuso), e una linea di campo magnetico è chiusa; se questa attraversa la superficie delimitata dalla spira di filo elettrico, è come avere i due anelli di una catena, che non si possono staccare l'uno dall'altro senza tagliarne uno.

Ma se così stanno le cose, sta succedendo qualche cosa di stupefacente! Non è più vero che il rotore del campo elettrico è zero, non è più vero che il campo elettrico è conservativo! L'equazione scritta in precedenza diventa allora la seguente:

$$rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

che prende il nome di terza Equazione di Maxwell, e che esprime una proprietà sconcertante: prendi una spira di filo elettrico, e mettila in una regione di spazio in cui sia presente un campo magnetico oscillante nel tempo; ai capi della spira, *senza che questa sia collegata ad alcun generatore*, si manifesterà una differenza di potenziale (detta anche *forza elettromotrice indotta*) in grado di produrre lavoro. In presenza di un campo magnetico variabile nel tempo, il campo elettrico *non è più conservativo*, cioè è possibile ottenere lavoro da esso, ciclicamente. Naturalmente, qualcuno dovrà metterci l'energia necessaria per compiere questo lavoro; questo qualcuno sarà chi si occuperà di generare il campo magnetico alternato, che ancora non abbiamo visto come possa essere prodotto.

Ecco perché questa legge prende anche il nome di legge dell'*induzione*: un campo magnetico, purché sia variabile nel tempo, *induce* un campo elettrico in un opportuno circuito (una spira di filo elettrico), e tale campo elettrico (o la differenza di potenziale da esso risultante) può essere non solo misurato, ma anche usato per produrre lavoro, per realizzare una macchina. È sulla base di questa legge, che può anche essere espressa nella forma forse più nota

$$f = -\frac{d\Phi}{dt}$$

che funzionano moltissime macchi elettriche, tra cui, ad esempio, i trasformatori elettrici. Nella formula di sopra, *f* è la forza elettromotrice indotta, o la tensione ai capi della spira, e **Φ** è il *flusso* del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dalla spira; l'operatore di derivata tiene in conto del fatto che solamente flussi di campo magnetico variabili nel tempo sono responsabili della forza elettromotrice indotta.

La terza legge di Maxwell ha una validità più generale di quella che abbiamo sottolineato qui. Sia quando viene espressa in termini di rotore del campo elettrico, che quando viene espressa in termini di derivata temporale del flusso del campo magnetico, ciò che varia nel tempo è **B** come vettore, per cui a variare non è detto che debba essere la sua intensità. Potrebbe invece variare la sua direzione, ad esempio. Ma poiché ciò che conta è la direzione *relativa* di **B** rispetto alla superficie delimitata dalla spira di filo conduttore, a variare potrebbe essere ad esempio anche solo la *posizione* di una spira di filo conduttore rispetto ad un campo magnetico altrimenti *statico*. La legge dell'induzione si applicherebbe comunque, indifferentemente.

La portata della legge dell'induzione è senz'altro enorme dal punto di vista tecnologico: i trasformatori elettrici, dicevamo, funzionano esattamente grazie ad essa, ma anche tutta una serie di dispositivi e sensori ne fanno un grande uso. Un tachimetro, ad esempio, o un contagiri, sono spesso costituiti da una spira (in genere una serie di spire, o una bobina) di filo elettrico ancorata da qualche parte ad un telaio e un magnete permanente (calamita) ancorato alla ruota o all'albero motore o a quello di cui occorre misurare la velocità angolare; il movimento relativo del magnete permanente (che genera un campo magnetico nello spazio esterno, e tale campo oscilla nel tempo in virtù del moto del magnete causato dalla rotazione della ruota o dell'albero a cui è ancorato) rispetto alla spira di filo elettrico induce in questa una tensione, che può essere misurata ed utilizzata per determinare la velocità di rotazione dell'albero o della ruota. Lo stesso principio può essere usato per molti altri dispositivi e sensori, e in generale può essere usato per *trasferire energia* in punti dello spazio che non possono essere materialmente a contatto tra di loro (per via di ostacoli, barriere, o perché sono in moto relativo l'uno rispetto all'altro): grazie al fatto che i campi (in questo caso il campo magnetico) si propagano nello spazio senza bisogno di un mezzo che ne consenta la propagazione, trovato il modo di generare qui un campo magnetico variabile nel tempo, posso mettere là, in un punto che non potrei raggiungere altrimenti, una spira di filo elettrico, e sfruttare la terza Equazione di Maxwell per ritrovarmi là con un campo elettrico non conservativo, ovvero con dell'energia pronta per essere utilizzata per produrre lavoro.

La legge dell'induzione, però, non si esaurisce con la sola terza Equazione di Maxwell. Il legame tra campi elettrico e magnetico è più ampio, e ha una controparte che qui ancora non è emersa: succede qualche cosa ai campi magnetici, infatti, quando nello spazio ci sono campi elettrici variabili nel tempo. Ma di questo non possiamo occuparcene ora, perché prima dobbiamo finalmente dire come si fa a generare un campo magnetico. E questo, e il completamento della legge dell'induzione elettromagnetica, sono il mirabile risultato della quarta Equazione di Maxwell.

A presto,

Marco