Le equazioni di Maxwell II

Sabato 26 maggio 2007

Caro Amico,

non è che Maxwell si possa prendere il merito di tutto. Le equazioni che portano il suo nome, e di cui oggi esamineremo la seconda, rappresentano un momento altissimo di sintesi di quasi un secolo di ricerca, teorica e sperimentale, sui fenomeni elettromagnetici, che ha visto coinvolti molti ricercatori del calibro di Ampère, Oersted, Faraday, Ohm, Laplace o Gauss, solo per citarne alcuni (e facendo così automaticamente torto a tutti gli altri che, sono sicuro, me ne vorranno). Ma non è che per questo il lavoro di Maxwell si debba ridurre "solamente" ad un "riordino" di un sapere già acquisito. Il suo contributo è anzi stato fondamentale, di importanza capitale, ed è a giusto titolo che gli viene riconosciuto il merito di aver scritto le quattro equazioni che portano il suo nome, anche se ovviamente esse sono il frutto di un'elaborazione ben più lunga di quellla, seppur imponente, che lui stesso ha potuto formulare.

Se la prima equazione di Maxwell ha a che fare col campo elettrico, e con le *cariche* elettriche che lo generano, la seconda ha a che fare col campo magnetico. Di per sé non è una cosa così ovvia. A prima vista i fenomeni di natura elettrica e quelli di natura magnetica potrebbero tranquillamente essere separati tra di loro. Ad un'osservazione superficiale, infatti, non emerge alcun legame tra i fenomeni che causano un fulmine o l'elettrificazione dei nostri capelli o ci fanno "prendere la scossa" quando scendiamo dall'auto, con i fenomeni che riguardano l'allineamento dell'ago della bussola lungo una direzione che punta verso il Polo Nord magnetico (che disgraziatamente non coincide col Polo Nord geografico e, per giunta, si posta rispetto a questo al passare del tempo), o con l'affascinante potere attrattivo o repulsivo che una calamita esercita su di un'altra, o su un pezzo di ferro (in questo caso, si manifesta solamente attrazione e non repulsione, ma il perché lo vedremo un'altra volta). Eppure, il fatto stesso che un'equazione che ha a che fare col campo magnetico compaia tra le equazioni di Maxwell, dove un'altra ha a che fare col campo elettrico, ci fa capire che i due argomenti devono essere legati tra di loro più di quanto possiamo pensare.

Così in effetti è, in maniere tutt'altro che banali, e che avrebbero sorpreso tanti scienziati, a partire da Ampère e Faraday, e che ancora adesso non finiscono di meravigliare chi si affaccia allo studio di questi argomenti. Ma il legame profondo che c'è tra campo elettrico e campo magnetico emergerà solo quando discuteremo della terza e della quarta equazione di Maxwell. Per oggi dovremo accontentarci di ignorare ancora per un po' questa stretta parentela, ed esaminare il campo magnetico come un'entità separata.

Innanzitutto è un campo. Ne abbiamo parlato già più volte, e in quest'occasione non ci dilungheremo più di tanto: un campo è una proprietà dello spazio. C'è qualche cosa che genera un campo, lo spazio acquisisce punto per punto un *valore* per questa proprietà, e c'è un sistema fisico *esploratore* che è in grado di *misurare* il valore del campo, punto per punto dello spazio; *misurare* vuol dire *interagire* col campo stesso, subirne degli effetti (una forza, uno scambio di energia, ecc.). Tutto questo era mirabilmente espresso nella prima equazione di Maxwell: un campo, denominato elettrico, è una proprietà dello spazio identificata col vettore **E**; una carica elettrica ne è la sorgente; e per una mirabile simmetria, un'altra carica elettrica è il sistema fisico usato per misurare il campo stesso, subendo di fatto una forza attrattiva o repulsiva proporzionale al prodotto della carica sorgente e della carica esploratrice e all'inverso del quadrato della loro distanza. La prima equazione di Maxwell, da sola, e nella sua semplicità, contiene in sé i tre ingredienti che costituiscono il concetto fisico di *campo*; di *qualunque* campo.

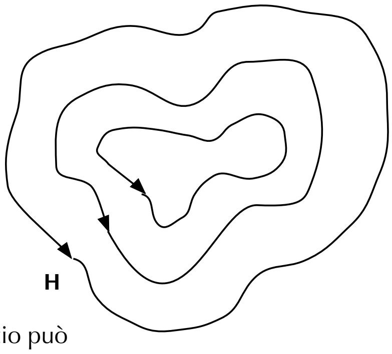
La seconda equazione di Maxwell, da questo punto di vista, è estremamente deludente. Essa si limita a definire una *proprietà* del campo magnetico, ma non dà informazioni su come esso venga generato né su come esso possa essere misurato. Eppure, la seconda equazione di Maxwell, che adesso finalmente enunceremo, racchiude in sé molta Fisica interessante.

Recita la seconda equazione di Maxwell che la divergenza del campo magnetico è, *in ogni punto dello spazio*, pari a zero:

$$div\ \mu_0\vec{H} = 0$$

La differenza col caso del campo elettrico è subito evidente: la sua divergenza era diversa da zero in tutti e soli i punti dello spazio in cui fossero presenti cariche elettriche. Se il campo elettrico **E** avesse divergenza nulla in *ogni* punto dello spazio, esso sarebbe identicamente nullo. Il campo magnetico **H**, invece, ha *sempre* divergenza nulla in *ogni* punto dello spazio. Vuol forse dire che il campo magnetico è identicamente nullo? Naturalmente no, sia perché non saremmo qui a discuterne, sia perché in qualche maniera dobbiamo pur rendere conto del come funziona una bussola o del perché una calamita attira un pezzo di ferro. Ciò che la seconda equazione di Maxwell ci dice è che il campo magnetico **H** è di natura profondamente diversa dal campo elettrico **E**.

Il campo elettrico, infatti, ha delle sorgenti, cariche elettriche positive o negative che nello schema visivo donatoci da Faraday rappresentano le fonti da cui scaturiscono o i pozzi verso cui convergono e si inabissano le linee di forza del campo elettrico. Essendo dotato di sorgenti, il campo elettrico non esiste senza di esse. Affinché esista un campo elettrico, *almeno un punto* dello spazio deve mostrare una divergenza di **E** diversa da zero. Negli altri punti dello spazio, privi di cariche elettriche lì localizzate, la divergenza di **E** sarà allora nulla, pur essendo **E** diverso da zero; e infatti una carica esploratrice ne avvertirà la presenza, subendo una forza.



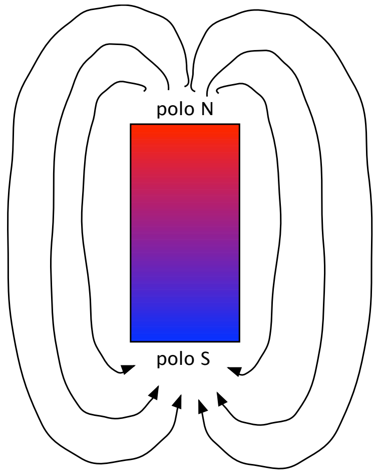
Il campo magnetico, invece, non può essere compreso con una descrizione analoga, perché la sua divergenza è *sempre* uguale a zero, in *ogni* punto dello spazio. Com'è possibile? Dal punto di vista geometrico, la soluzione è semplice: se le linee di campo di **E** hanno un'origine (nelle cariche elettriche positive) e un termine (nelle cariche elettriche negative), le linee di campo di **H** non hanno né origine né termine: sono linee *chiuse*, come mostrato nella figura qui di fianco. Esse *non si intersecano mai*, poiché la divergenza di **H** è nulla in ogni punto dello spazio, e devono necessariamente richiudersi su loro stesse, sempre per garantire che la divergenza di **H** possa restare nulla ovunque. *Nessun* punto dello spazio può mai, in nessuna circostanza, avere una divergenza di **H** diversa da zero.

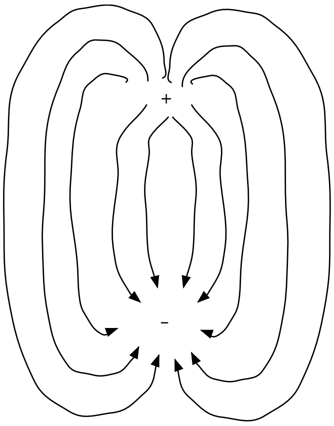
Apparentemente, ci stiamo cacciando in un vicolo cieco: stiamo dicendo che il campo magnetico non ha sorgenti. Ma se non c'è nulla che lo genera, come fa ad esistere?

La questione, ovviamente, è più complessa. Anche il campo magnetico può essere generato, anzi se non c'è un opportuno *generatore* non sarà possibile disporre di un campo magnetico. Ma tale generatore è di natura diversa da quello che dava origine al campo elettrico. La seconda equazione di Maxwell non ci può dire com'è fatto tale generatore di **H**, ma ci può dire come *non* è fatto: esso non è costituito da *cariche* magnetiche, formalmente equivalenti alle cariche elettriche. Ovvero, *non* esistono "cariche" magnetiche positive o negative dalle quali si sprigiona il campo magnetico.

Anche questa affermazione è sorprendente: se pensiamo ad una calamita, abbiamo subito ben chiara nella nostra mente l'immagine dei due *poli* della calamita, convenzionalmente chiamati Nord e Sud (ma potremmo chiamarli *positivo* e *negativo*, per analogia col caso elettrico, tanto ovviamente i nomi non sono altro che convenzioni). Ma c'è una differenza sostanziale, enorme tra le cariche elettriche che originano **E** e i poli magnetici di una calamita che originano **H**. Tale differenza è che le cariche elettriche esistono *singolarmente*, i poli magnetici no. Ovvero, un elettrone o un protone sono particelle (elementare la prima, composta la seconda) che possono essere isolate, separate l'una dall'altra, e in teoria potrebbe esistere un Universo costituito da una sola di esse: un solo protone (con carica elettrica positiva) o un solo elettrone (con carica elettrica negativa); e in tale Universo esisterebbe un campo elettrico generato da tale carica, benché ovviamente l'assenza di una seconda carica esploratrice lo renderebbe piuttosto inutile. Ma un polo Nord di una calamita non può *mai* essere separato dal polo Sud della medesima calamita. Non può esistere una calamita con un polo solo. Non può esistere un cosiddetto *monopòlo magnetico*. A generare il campo magnetico **H** non è un monopòlo magnetico, ma un *dipolo* magnetico, ovvero la presenza simultanea (in due punti *diversi* dello spazio, ma anche infinitamente vicini) dei due poli magnetici Nord e Sud. Che, come appena detto, possono anche essere infinitamente vicini, perché non possono mai essere separati e portati a distanza infinita l'uno dall'altro, non possono esistere l'uno senza l'altro.

Un dipolo magnetico si rappresenta proprio bene con la classica calamita a sbarretta, di cui, nella figura della pagina seguente, vediamo anche il campo magnetico generato nello spazio circostante. Ben noto è l'esempio che si trova su tutti i libri di scuola che se anche dovessimo spezzare la calamita in due, non ne separeremmo il polo Nord da quello Sud, ma otterremmo solamente due calamite più piccole. E così, idealmente, all'infinito (da qualche parte, come ben sai, bisognerà ad un certo punto fermarsi, perché la materia non è continua ma è granulare, ma su quali siano i limiti microscopici del magnetismo ce ne occuperemo un'altra volta). Ma anche la rappresentazione che abbiamo appena dato della calamita come un *dipolo* magnetico, ovvero una coppia polo Nord - polo Sud inscindibile che dà origine ad un campo nello spazio circostante, è in contraddizione con quanto dice la seconda equazione di Maxwell: non è forse vero che il polo Nord e il polo Sud sono due sorgenti del campo **H**, e in loro corrispondenza la divergenza è diversa da zero? Che differenza concettuale c'è tra la calamita qui raffigurata a destra, col suo campo magnetico, e il caso elettrico rappresentato nella figura qua a sinistra? Le differenze, in realtà, sono molte. Innanzitutto, come dicevamo, nel caso elettrico possiamo separare le due cariche positiva e negativa e trattarle singolarmente; nel caso magnetico non lo possiamo fare. In secondo luogo, nel caso elettrico le due cariche sono *puntiformi*, ovvero sono infinititamente piccole (almeno idealmente); la calamita, invece, non è infinitamente piccola: tra il polo Nord e il polo Sud che abbiamo rappresentato non c'è spazio vuoto, c'è *materia*. E la presenza della materia ci obbliga a rivedere la seconda equazione di Maxwell, così come ci obbligherebbe a rivedere anche la prima (se ricordi, avevamo esplicitamente detto che nello spazio non v'era altra materia al di fuori delle cariche elettriche *puntiformi* che generano **E**, e della carica elettrica esploratrice). Piuttosto che complicarci da subito la vita per esaminare il caso, molto più complesso, di un universo che non sia vuoto ma che contenga materia, semplifichiamo la nostra "calamita", rendendola un dipolo infinitesimo, ovvero un punto dello spazio in cui i due poli magnetici Nord e Sud sono infinitamente vicini; da essi partono e ad essi arrivano le linee di campo di **H**; ma essendo essi infinitamente vicini, tali linee si richiuderanno su loro stesse. Per farti un'idea, immagina di rimpicciolire la calamita rappresentata poco sopra, fino a farla diventare infinitamente piccola; le linee di campo che partono dal polo Nord e arrivano al polo Sud si richiuderanno sempre più su loro stesse, fino, al limite, a costituire linee continue, *chiuse*, a divergenza nulla *ovunque nello spazio*.





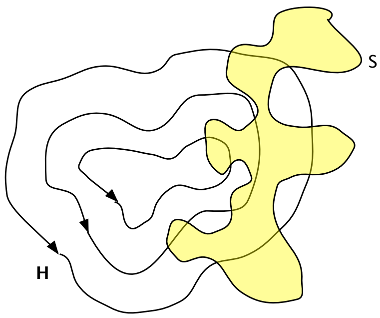
Questa rappresentazione non risponde alla domanda se questi dipoli magnetici infinitesimi esistano davvero, come siano fatti, se siano solo un modello e se invece i generatori del campo magnetico siano altri, né di come possiamo misurare il campo magnetico stesso, accorgerci della sua presenza. Ma ciò nonostante, la seconda equazione di Maxwell ci ha permesso di stabilire alcuni punti fermi:

- il campo magnetico **H** ha divergenza nulla in ogni punto; si dice anche che il campo **H** è *solenoidale*;
- il campo magnetico **H** è rappresentato da linee di forza chiuse non intersecantisi;
- il campo magnetico **H** non può essere generato da *cariche* o *monopòli* magnetici, ma è generato da *dipoli* magnetici infinitamente piccoli; come vedremo, essi non sono gli unici generatori del campo magnetico, o meglio essi possono essere interpretati in maniera differente ma equivalente; ma di questo parleremo in futuro.

Così come avevamo fatto per il caso elettrico, anche per quanto riguarda la seconda equazione di Maxwell possiamo scriverla in forma *differenziale*, mediante la divergenza, o in forma *integrale*:

$$\Phi\left(\mu_0\vec{H}\right) = 0$$

da leggersi: il *flusso* di **H** attraverso una *qualunque* superficie chiusa (che quindi delimita un volume *finito*) è sempre nullo. L'interpretazione da dare a questa espressione della seconda equazione di Maxwell non è diversa da quella che davamo alla forma integrale della prima equazione di Maxwell, il cui secondo membro era nullo in tutti i casi in cui la superficie scelta racchiudeva un volume che *non* conteneva cariche elettriche. Poiché *non esistono* cariche magnetiche che generano il campo **H**, una superficie chiusa qualunque, che racchiude un volume qualunque di spazio, non potrà averne all'interno; e il flusso del campo magnetico attraverso questa superficie sarà *sempre* nullo. La figura qui di fianco richiama alla memoria quelle che già avevamo visto in occasione della discussione sulla prima equazione di Maxwell. Questa volta abbiamo delle linee di flusso del campo magnetico, e una superficie *S qualunque* che racchiude un volume finito. Se ti può fare comodo richiamare un'altra volta alla mente l'analogia col parco recintato, attorno al cui perimetro cammini osservando frecce scagliate da invisibili arcieri, sei ovviamente invitato a farlo. È immediato osservare dalla figura che essendo le linee di campo magnetico chiuse e non intersecantisi attraverseranno il contorno *S* sempre un numero *pari* di volte, tante volte "entrando" nel volume racchiuso da *S* e tante volte "uscendo". Il flusso di **H** attraverso una superficie chiusa *S qualunque* è *sempre* nullo, anche se **H** è diverso da zero, così come la sua divergenza è *sempre* nulla, anche se il campo è diverso da zero.



Non abbiamo ancora detto che cosa genera il campo magnetico, né quale sia il suo legame stretto e profondo col campo elettrico, e non lo possiamo fare oggi. Ma possiamo ancora dire che quel termine μ_0 che compare nella seconda equazione di Maxwell prende il nome di *permeabilità magnetica del vuoto*, è l'analogo magnetico del termine ε_0 che compariva nella prima equazione di Maxwell, e come quest'ultimo assumerà un significato fisico solo più avanti. Basti qui dire che μ_0 vale *esattamente* $4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m (*esattamente* si fa per dire, essendo π un numero irrazionale e quindi non rappresentabile da un numero finito di cifre), e tale valore è una conseguenza di come è definita l'unità di misura dell'intensità della corrente elettrica: l'ampère. Ma che cosa c'entra la definizione dell'intensità della corrente elettrica con la seconda equazione di Maxwell e quindi col campo magnetico?

A presto,

Marco