Le equazioni di Maxwell I

Sabato 31 marzo 2007

Caro Amico,

la Fisica Classica si poggia su tre pilastri: Meccanica, Termodinamica ed Elettromagnetismo. Della prima abbiamo già parlato, e della seconda ci occuperemo in futuro. Con oggi iniziamo invece un viaggio nel mondo dell'elettromagnetismo, il cui studio sistematico è iniziato nel XVIII Secolo spesso più a titolo di curiosità che di vero interesse scientifico, ma ha poi conosciuto l'attenzione di scienziati del calibro di Faraday, Ampère, Oersted, Ohm, fino a "mostri sacri" come Gauss o Maxwell. Proprio quest'ultimo avrebbe mirabilmente sintetizzato pressocché tutto lo scibile nell'ambito dell'elettromagnetismo "classico" in quattro splendide equazioni, che portano il suo nome. Esse, affiancate da altre tre equazioni "costitutive" della materia, contengono in linea di principio tutta la fenomenologia elettromagnetica, dal campo elettrostatico generato da una particella carica e dal campo magnetico generato da una calamita, alle onde elettromagnetiche con cui oggi, grazie all'intuizione di Herz, inviamo trasmissioni radiotelevisive e comunichiamo in tutto il mondo.

La prima delle equazioni di Maxwell prende anche il nome di *Teorema di Gauss*, e nella sua semplicità racchiude un'idea assolutamente fondamentale. Essa infatti, come stiamo per vedere, enuncia quale sia la *sorgente*, l'origine del *campo elettrico*. Ti ricordo che il concentto di *campo* è un concetto apparentemente un po' strano, ma in fondo molto comodo: esso rappresenta una *proprietà dello spazio*, associata ad esso punto per punto; un'opportuna particella dotata di una qualche caratteristica fisica sensibile al campo che si vuole considerare potrà essere impiegata per esplorare lo spazio; interagendo col campo presente nello spazio nel punto in cui si trova la particella, questa ne subirà le conseguenze, ad esempio sotto forma di una forza a cui viene sottoposta, o d'altro. È proprio questo il caso del campo elettrico che, invisibile, pervade lo spazio, e può essere individuato da una particella elettricamente carica, ad esempio un elettrone, che subirà una forza per effetto della sua interazione col campo stesso. Ma se per dire tutto ciò è sufficiente *postulare* l'esistenza di un campo elettrico, la curiosità di chiedersi da che cosa origini il campo elettrico è legittima, ed è ad essa che dà soddisfazione il teorema di Gauss. Chiamato **E** il campo elettrico (ti ricordo che con le lettere in grassetto indichiamo grandezze *vettoriali*, con una notazione assolutamente equivalente a quella di scriverle con una freccetta sopra), il teorema di Gauss afferma che:

$$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

dove

- div è un operatore matematico che agisce su dei vettori; non ci occupiamo qui del dettaglio di come sia definito questo operatore, che chiameremo *divergenza*; discuteremo invece tra poco del suo significato fisico;

- ρ è la *densità di carica* elettrica nel punto dello spazio che stiamo prendendo in considerazione;

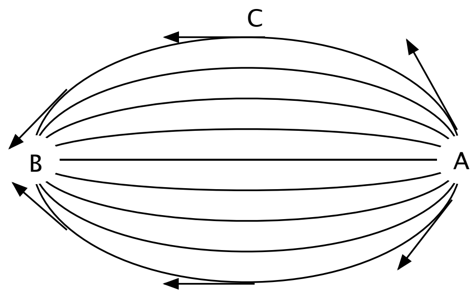
- **E** è naturalmente il campo elettrico che c'è nel medesimo punto dello spazio;

- ε_0 è una costante che prende il nome di *costante dielettrica* (o *permittività*) del vuoto; infatti, giova ricordarlo, tutte le considerazioni che stiamo facendo qui sono valide nel *vuoto*; ed è già chiara la contraddizione: siamo nel vuoto, eppure stiamo dicendo che nel punto di spazio che stiamo considerando c'è una densità di carica elettrica; che, ovviamente, sarà data dalla presenza di materia. In realtà, quando parliamo di *vuoto* intendiamo che non c'è altra materia *a parte quella che genera il campo elettrico* (la nostra ρ) e a parte la carica elettrica che usiamo per esplorare lo spazio; tale carica elettrica la considereremo *elementare*, come un elettrone per l'appunto, cioè che interagisce col campo elettrico locale *solo* attraverso una forza e *senza modificare il campo elettrico locale*; questo sarà un punto sul quale dovremo tornare.

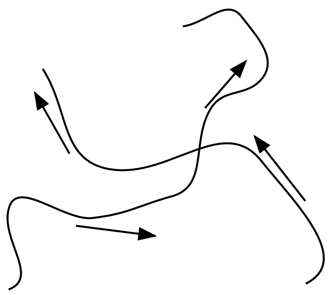
Ma allora: che cosa vuol dire questo teorema di Gauss?

Una delle intuizioni geniali di Faraday, che gli valsero molto scherno e che oggi gli valgono molta ammirazione, fu quella di *rappresentare* un campo (elettrico o magnetico che sia) attraverso quelle che oggi chiameremmo *linee di flusso* o *linee di forza*. Vale la pena sottolineare ancora che si tratta di una *rappresentazione*, di un modo per raffigurarsi qualche cosa che non è né visibile né tangibile, ma che pure esiste. L'idea è semplice: abbiamo detto che una particella elementare carica (ad esempio un elettrone) può essere impiegata per esplorare la proprietà *campo elettrico* dello spazio. Interagendo col campo elettrico, la particella esploratrice subirà una forza. Immaginiamo di poterla misurare. Ti ricordo che la forza è un vettore, quindi ha un'intensità, ma anche un punto di applicazione (il punto dello spazio in cui si trova in quel momento la particella elementare), una direzione e un verso. Ecco l'idea di Faraday: in ogni punto dello spazio, immagino di poter posizionare la mia particella esploratrice, e di misurare il vettore forza che subisce a causa dell'interazione col campo elettrico. In quel medesimo punto dello spazio, allora, rappresenterò questa forza mediante una freccia, avente direzione e verso della forza, e lunghezza proporzionale alla sua intensità. Ripeto questa operazione per ogni punto dello spazio, e ho ottenuto una rappresentazione grafica di come evolve nello spazio l'interazione tra la particella e il campo.

Naturalmente questa operazione ha qualche controindicazione, prima fra tutte che richiede di mappare un numero infinito di punti (lo spazio, anche se ne consideriamo una porzione limitata, contiene comunque un numero infinito di punti). Ma per fortuna possiamo effettuare qualche semplificazione. Ad esempio consideriamo uno spazio bidimensionale in luogo del nostro consueto spazio tridimensionale (ci semplificherà non di poco la rappresentazione delle linee di forza), e poi ci accontenteremo di mappare la forza che nasce dall'interazione tra la particella e il campo solo in un numero finito (e accuratamente scelto) di punti. Ciò che otterremo sarà qualche cosa che potrebbe assomigliare a quanto rappresentato nella figura qui di fianco. In tre punti non troppo lontani da quelli che sono chiamati A, B e C sono rappresentati tre vettori, che indicano punto di applicazione, intensità, direzione e verso della forza che la particella esploratrice individua in quei punti dello spazio. Possiamo naturalmente immaginare di ripetere l'operazione di misura un gran numero di volte, in punti dello spazio sufficientemente vicini l'uno all'altro. Anzi, ancora meglio, scelto un punto dello spazio e misurata la forza, ci sposteremo da esso di una quantità infinitesima nella stessa direzione della forza misurata. Determineremo nuovamente la forza, ne tracceremo il vettore, e ci sposteremo ancora di un'altra quantità infinitesima, nella direzione della forza appena misurata. E così via. Hai già capito quello che stiamo facendo: stiamo tracciando la curva di cui le frecce che rappresentano la forza di interazione tra particella e campo sono, punto per punto, le *tangenti*. Tale curva (ad esempio una delle varie che sono rappresentate nella figura di sopra) sarà una delle linee di forza (o di flusso) del campo. Tali linee danno un'idea geometrica del campo, un'intuizione grafica: una particella esploratrice che si trovasse in un punto dello spazio, soggetta alla forza di interazione col campo in questione e libera di muoversi, che percorso seguirebbe? Dove la condurrebbe il campo oggetto di studio? Essa seguirebbe proprio una linea di flusso (o di forza). Ed ecco quindi un modo diverso per immaginare di tracciare queste linee: poter disegnare le traiettorie percorse da un numero molto grande di particelle esploratrici, ognuna che parta da un punto diverso dello spazio. L'insieme (idealmente infinito) di queste traiettorie individua ancora una volta una mappa del campo, attraverso le sue linee di forza.



Questa rappresentazione geometrica è utile non solo perché visualizza ciò che altrimenti avremmo difficoltà a rappresentarci, essendo vincolati ad usare solo descrizioni matematiche, ma perché ci suggerisce intuitivamente alcune proprietà che le descrizioni matematiche faranno naturalmente emergere e che saranno estremamente importanti.



La prima proprietà, di cui non si parla mai molto ma che è fondamentale, è che le linee di flusso *non si intersecano mai*. In altre parole, una mappa di un campo non potrà mai essere come quella rappresentata qui di fianco. Per pure esigenze di chiarezza grafica ho disegnato le frecce individuanti *alcuni* vettori forza non tangenti alle linee di flusso, ma un po' staccati. Dicevamo, un campo con una mappa siffatta non può esistere; infatti, che cosa succederebbe ad una particella che si trovasse esattamente nel punto di intersezione delle due linee di flusso rappresentate? Quale linea seguirebbe? Con che criterio ne seguirebbe una anziché un'altra? E perché non una terza ancora, lungo la curva la cui tangente in quel punto è data dalla somma vettoriale dei due vettori forza tangenti, in quel punto, alle due linee di campo rappresentate in figura? Insomma, non si può fare: qualunque sia il campo che prendiamo in considerazione (ivi incluso il campo elettrostatico), le sue linee di flusso non potranno mai intersecarsi. Naturalmente, la figura appena vista potrebbe essere la proiezione in due dimensioni di un qualche cosa che avviene in tre dimensioni; ovvero, le due linee di flusso rappresentate potrebbero non intersecarsi affatto, trovarsi ad *altezze* differenti in uno spazio tridimensionale, e l'intersezione potrebbe essere solamente un artefatto dovuto all'aver rappresentato un fenomeno intrinsecamente tridimensionale in due sole dimensioni. Questo ovviamente è legittimo; ma allora sarebbe un problema di rappresentazione grafica ineadeguata, e ovviamente non è di questo che ci stiamo occupando qui.

L'altra proprietà importante emerge chiaramente di nuovo dalla prima figura della pagina precedente; c'è qualche cosa di strano, di anomalo che succede in corrispondenza dei punti A e B. Qualche cosa che sembra contraddire quanto abbiamo appena detto, perché lì le linee di flusso sembrano intersecarsi eccome! Com'è possibile?

C'è in realtà una grossa differenza: il punto A della prima figura della pagina precedente è un punto da cui *tutte* le linee di campo *divergono*; il punto B è un punto verso cui *tutte* le linee di campo *convergono*. Molto diverso è il caso delle linee di campo intersecantisi della seconda figura, dove nel punto di intersezione abbiamo simultaneamente convergenza (frecce, ovvero forze, la cui punta si indirizza verso il punto di intersezione) e divergenza (frecce, ovvero forze, che lungo le medesime linee di flusso puntano allontanandosi dal punto di intersezione). Matematicamente, i punti A e B rappresentati in figura sono diversi dagli altri punti dello spazio, proprio perché in essi tutte le linee di forza divergono oppure convergono. Non ho usato questi termini a caso, o meglio non ho usato il termine "divergenza" a caso quando ho introdotto per la prima volta il teorema di Gauss. È infatti possibile costruire un opportuno operatore matematico, che si chiama appunto *divergenza*, che applicato ad un *campo vettoriale* (come il campo elettrico) esprime, punto per punto nello spazio, se tale punto:

- sia come il punto C, ovvero vi passa *una sola* linea di campo che da una parte "entra" e dall'altra "esce"; in questo caso la *divergenza* è zero;

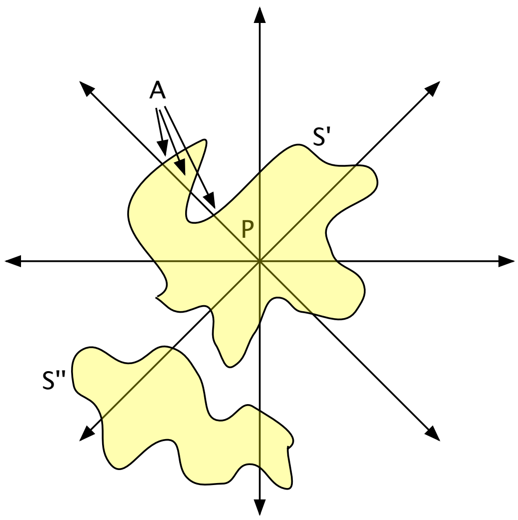
- sia come il punto A, ovvero vi passano *infinite* linee di campo, tutte "uscenti"; in questo caso la *divergenza* è positiva;

- sia come il punto B, ovvero vi passano *infinite* linee di campo, tutte "entranti"; in questo caso la *divergenza* è negativa.

Con un simile operatore matematico, allora, possiamo porre una distinzione formale rigorosa tra quell'infinità di punti dello spazio come C, dove la *divergenza* è nulla, e quei pochi (magari addirittura finiti) punti dello spazio dove la *divergenza* non è nulla. I punti come A saranno detti *sorgenti*, i punti come B saranno detti *pozzi*. Va comunque notato che non esiste nessuna differenza sostanziale tra sorgenti e pozzi; il segno della *divergenza* è un fatto accidentale, non ne modifica la natura. È in essi, nei punti a *divergenza* diversa da zero, che risiedono le *sorgenti del campo elettrostatico*. Ovvero, data la formula che individua il teorema di Gauss, avremo una *divergenza* del campo **E** diversa da zero in tutti e soli quei punti dello spazio in cui il secondo membro dell'equazione è diverso da zero; e l'unico parametro che può essere diverso da zero è la densità di carica elettrica ρ. Ecco allora che i punti dello spazio a *divergenza* positiva saranno quelli in cui è localizzata una densità di carica elettrica ρ diversa da zero e di segno positivo (le chiameremo cariche *positive*), mentre i punti dello spazio a *divergenza* negativa saranno quelli in cui è localizzata una densità di carica elettrica ρ diversa da zero e di segno negativo (le chiameremo cariche *negative*).

Notevole: le cariche elettriche (che immaginiamo essere puntiformi, e almeno per quanto riguarda gli elettroni a quanto ne sappiamo oggi questa supposizione è vera) sono quelle che *generano* il campo elettrostatico; e sono anche quelle grazie alle quali possiamo andarlo ad esplorare per individuarne le linee di flusso. Ecco perché dicevamo che è molto importante immaginare che la *carica esploratrice* con cui tracciamo le linee di flusso sia in grado di interagire col campo elettrico dello spazio in quel punto, ma *non lo perturbi*: perché quella medesima carica esploratrice è una carica elettrica, e in quanto tale è una *sorgente* del campo elettrico, che *inevitabilmente* lo perturberà. Ma se questo è vero nella pratica, nulla ci vieta di separare i due contributi (generazione del campo elettrico e misura dello stesso) al fine di costruirci una rappresentazione formale più semplice e più maneggevole di questi fenomeni.

Vale la pena approfondire ancora un po' il discorso per ricordare che l'espressione che abbiamo dato del teorema di Gauss non è l'unica possibile. Come vedremo anche in futuro, è d'uso dare delle equazioni di Maxwell, di cui il teorema di Gauss è la prima, due rappresentazioni distinte, che naturalmente esprimono la stessa identica cosa, ma sono scritte in modi diversi. L'espressione che abbiamo già dato per il teorema di Gauss è scritta in quella che in genere si chiama *forma differenziale* (da contrapporre all'altra forma, che tra poco vedremo, che assume il nome di *forma integrale*); in generale, un'equazione che descrive un certo fenomeno fisico così come avviene *punto per punto* nello spazio si dice essere scritta in forma differenziale. Come abbiamo visto, nel teorema di Gauss sia il campo elettrico **E** sia la desità di carica elettrica ρ sono funzioni delle coordinate spaziali, e conferiscono pertanto alla formulazione che abbiamo dato la caratteristica di essere espressa in forma differenziale.



Trasformare il teorema di Gauss dalla forma differenziale a quella integrale non è difficile, ma naturalmente richiede un po' di matematica. Qui non faremo i conti, ma cercheremo comunque di capire come si fa, e perché questo nuovo modo di esprimere il teorema di Gauss assuma il nome di forma integrale e sia così importante. Torniamo però ad una rappresentazione del campo elettrico mediante linee di flusso, immaginando di avere un certo punto P dello spazio in cui è localizzata una carica elettrica (ad esempio positiva) che fa pertanto da *sorgente* del campo (alcune linee di forza, che divergono radialmente da P sono indicate in figura), ed individuando nello spazio circostante due *volumi*, che per semplicità di rappresentazione nello spazio bidimensionale saranno due regioni di forma *qualunque*, che chiamo S′ e S′′. Notiamo subito una differenza molto importante tra S′ ed S′′: S′ è un volume che *circonda* e quindi *include* il punto P ove è localizzata la sorgente del campo elettrico, S′′ invece è un volume che *non* circonda e quindi non include il punto P. Che cosa comporta questo matematicamente?

Immaginiamo di percorrere la linea di contorno di S′, partendo da un punto a nostra scelta, e camminando su di essa sempre nello stesso verso (ad esempio antiorario) fino ad essere tornati nel punto di partenza. Percorrere la linea di contorno di S′ in verso antiorario vuol dire tenersi l'*interno* del volume racchiuso da tale linea di contorno alla nostra sinistra. Ad ogni passo, valuteremo la linea di forza che attraversa il contorno di S′ in quel punto lì; se proviene dalla nostra sinistra e punta verso la nostra destra sarà una linea di forza *uscente*, ovvero che origina dall'interno di S′ ed esce da esso; se proviene dalla nostra destra e punta verso la nostra sinistra sarà una linea di forza *entrante*, ovvero che origina al di fuori di S′ ed entra in esso. Appare evidente che possiamo avere tanto linee di forza entranti quanto linee di forza uscenti, ma come indicato ad esempio per i punti indicati con A le linee di forza *entranti* (quelle che provengono dalla nostra destra mentre camminiamo in senso antiorario lungo il contorno di S′) sono *sempre* accompagnate, un po' più in là, da una linea di forza uscente; anzi, dirò di più: *qualunque* linea di forza che origina da P attraverserà il contorno di S′ *sempre un numero dispari di volte*: uscirà *n* volte, ed entrerà *n*-1 volte. In totale, *qualunque* linea di campo generata da P esce da S′ una volta in più di quante entra. È inevitabile, dal momento che S′ è un contorno chiuso che racchiude un volume che include P.

Molto diverso è il caso del volume S′′: anche qui possiamo immaginare di camminare sul suo contorno in senso orario, e conteggiare le linee di forza entranti e uscenti; e scopriremo, inevitabilmente dal momento che S′′ non racchiude P, che ogni linea entrante in S′′ è anche uscente; ovvero ogni linea di flusso attraversa il contorno di S′′ esattamente un numero *pari* di volte.

Poiché il discorso è delicato, ripetiamolo ancora con parole leggermente diverse: ricordiamo innanzitutto ricordiamo che stiamo parlando del solo campo elettrico generato dalla carica che si trova nel punto P, e nient'altro. C'è una particella di prova che *non* genera nessun campo elettrico (è una situazione non fisica, ma serve per capire) che avverte la presenza di tale campo elettrico generato dalla carica localizzata in P. Diciamo che c'è un parco, circondato da una recinzione. Tu decidi di percorrere il perimetro del parco lungo la recinzione, procedendo in senso antiorario. Naturalmente, l'interno del parco sarà sempre alla tua sinistra, mentre l'esterno sarà sempre alla tua destra. Un arciere che tu non vedi, ma che c'è, scaglia delle frecce (le linee di flusso del campo elettrico); esse scoccano dal suo arco, ma non cadono mai (cadono solo all'infinito, o comunque molto più in là di dove tu possa vedere); tu vedi tali frecce passarti davanti, e ti domandi: dove si trova l'arciere? Per mantenere le cose semplici, valuterai che se una freccia proviene dalla tua sinistra e va verso la tua destra, essa proviene dall'interno del parco e procede verso l'esterno; se invece la freccia proviene dalla tua destra e va verso la tua sinistra, essa proviene dall'esterno del parco e procede verso il suo interno. Il secondo caso, quello del percorso S″, è il più semplice: poiché il parco è una regione confinata (non è infinito), una freccia che proviene dalla tua destra è stata scagliata da un arciere che si trova all'esterno del parco (la carica posizionata in P è al di fuori della regione delimitata dal contorno). Nel primo caso, quello del percorso S′, invece, una freccia che proviene dalla tua sinistra può essere stata scagliata da un arciere che si trova all'interno del parco, ma anche da un arciere che si trova all'esterno del parco dalla parte opposta di esso rispetto a dove ti trovi tu. Ora l'arciere scaglia frecce in continuazione, a raggiera lungo tutte le direzioni che dipartono da esso. Quando tu camminando lungo la recinzione del parco vedi una freccia che proviene dalla tua sinistra, devi decidere se essa è stata scagliata all'interno del parco oppure no. Come fai? Vai dall'altra parte del parco, e vedi lì le frecce da che parte vanno: se esse provengono dalla tua destra, ovvero dall'esterno, vuol dire che quelle che in precedenza vedevi provenire dalla tua sinistra erano in realtà state scagliate da un arciere che si trova all'esterno del parco. Se invece provengono ancora dalla tua sinistra, è perché l'arciere si trova all'interno del parco, e tutte le frecce che scaglia oltrepassano la recinzione (che sta sempre alla tua sinistra) quando ti passano davanti.

Un altro modo ancora per visualizzare la questione è prettamente grafico: disegna un contorno chiuso su un foglio, anche molto arzigogolato, senza anelli o buchi ovviamente, immagina appunto la recinzione di un parco o di un giardino. Scegli un punto interno alla superficie delimitata dal contorno chiuso. Disegna delle linee rette che partono a raggiera da quel punto fino ad oltrepassare il contorno chiuso. Dai un verso a queste linee rette, con delle frecce che partono dal punto che hai scelto. Osserva: ci sono linee rette che attraversano il contorno chiuso una sola volta. Esse lo attraversano dall'interno all'esterno della regione delimitata. Ci sono anche linee rette che attraversano il contorno chiuso più di una volta. Siccome il punto che hai scelto sta all'interno del contorno, esse lo attraversano sempre un numero dispari di volte: *n* volte da dentro a fuori, e *n*-1 volte da fuori a dentro. Un osservatore che cammina lungo il contorno in senso antiorario vedrà queste linee provenire dalla sua sinistra quando escono, e dalla sua destra quando entrano. Ma siccome la stessa linea la vede uscire più volte di quante entra, vuol dire che il punto da cui è originata sta all'interno del contorno. Se invece scegli un punto all'esterno del contorno, e tracci da esso delle rette a raggiera sempre con un verso che parte dal punto da te scelto, alcune di tali rette non incontreranno mai il contorno che hai disegnato sul foglio, mentre altre lo attraverseranno; noterai che essendo il contorno chiuso (che pertanto delimita una regione finita del foglio) le rette che attraversano il contorno lo fanno sempre un numero pari di volte: tante volte entrano e tante escono dal contorno, poiché la sorgente sta al suo esterno. Un osservatore che cammina lungo il contorno in senso antiorario vedrà una stessa linea entrare tante volte quante esce (ovviamente in punti diversi) e concluderà che la sorgente sta al di fuori del contorno.

Vale la pena ricordarlo: tutto questo è valido *qualunque sia la forma di S′ ed S″*; è un fatto assolutamente generale. Ma allora, se S′ ed S″ possono avere una forma qualunque, scegliamo una forma che ci sia comoda; una sfera, ad esempio (ti ricordo che i miei disegni sono in due dimensioni, ma solo per semplicità grafica, ovviamente tutti i fenomeni di cui stiamo parlando avvengono nello spazio fisico tridimensionale). Che cosa succede? Prendiamo in esame S′, che ora sarà un volume racchiuso da una superficie sferica centrata in P (non stiamo perdendo di generalità, perché la forma del volume abbiamo detto non essere rilevante). Conteggiare quante linee di forza entrano e quante escono dal contorno di S′ vuol dire, matematicamente, calcolare il *flusso* del campo **E** lungo il contorno di S′. Tralasciando alcune formalità matematiche (grazie al fatto che abbiamo scelto una superficie sferica centrata in P, che ci semplifica un sacco di cose), il calcolo del *flusso* di **E** si riduce essenzialmente a moltiplicare il *valore* di **E** sulla superficie di S′ (questo *valore*, ovvero il *modulo* del campo, è lo stesso in ogni punto della superficie, essendo essa centrata in P, ed essendo quindi ogni suo punto equidistante da P) con l'estensione della superficie S′ stessa. Se S′ è una sfera di raggio *r* e in P è localizzata una carica elettrica di valore *Q*, il modulo campo elettrico in ogni punto di S′ avrà valore:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

mentre la superficie di S′ varrà:

$$S' = 4\pi r^2$$

Il flusso del campo elettrico sarà allora dato dal loro prodotto:

$$\Phi\left(\vec{E}\right) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Questa è la cosiddetta *forma integrale* del teorema di Gauss. Ti faccio notare:

- questa espressione non dipende dalla forma del volume S';

- il flusso del campo elettrico è funzione *esclusivamente* della carica elettrica *contenuta all'interno* del volume considerato; se avessimo calcolato il flusso lungo S'', che *non* racchiude il punto P, l'unico in cui sia localizzata una sorgente del campo elettrico, il flusso risultante sarebbe stato pari a zero;

- se nel volume considerato ci sono molteplici cariche elettriche, Q ne è la *somma algebrica*, quindi ogni caricha racchiusa in S' va sommata col suo segno; ovvero, se S' racchiude tante cariche tutte uguali in valore, ma con segni diversi, tali per cui la loro somma è zero (ad esempio una carica positiva ed una carica negativa di uguale intensità), il flusso totale sulla superficie di S' è zero;

- se ci sono cariche elettriche sia all'interno del volume considerato, sia all'esterno, il flusso del campo elettrico lungo la superficie di tale volume continua a dipendere *esclusivamente* dalle cariche elettriche in esso contenute, e *non* da quelle esterne;

- la forma con cui è espresso il teorema di Gauss con queste notazioni si chiama "integrale" perché è essenzialmente frutto di un'operazione di integrazione della forma differenziale su un volume;

- il fatto che il flusso del campo elettrico non dipenda dalla forma della superficie di contorno del volume scelto nasce dal fatto che la superficie cresce come r^2 a mano a mano che ci si allontana dalla sorgente del campo elettrico, mentre il campo elettrico diminuisce come r^2 a mano a mano che ci si allontana dalla sua sorgente; è per via di queste due dipendenze funzionali che si cancellano *esattamente* l'una con l'altra che sussiste il teorema di Gauss;

- la conferma sperimentale che il campo elettrico diminuisce come $1/r^2$ è oggi disponibile con un'accuratezza sorprendente; ed è una delle cose più meravigliose della Fisica: se così non fosse, il teorema di Gauss non sarebbe vero, e le cariche elettriche *non potrebbero essere le uniche sorgenti del campo elettrico*; il fatto invece che sperimentalmente il campo elettrico abbia tale dipendenza funzionale dalla distanza dalle sue sorgenti ci assicura che *null'altro tranne le cariche elettriche può essere sorgente del campo elettrico*.

Non c'è che dire: in due semplici formule, c'è tanta di quella Fisica da restare sconcertati.

A presto,

Marco