円積曲線と円周率

今西英器

初等幾何による考察

円積曲線 (Quadratrix) とは、ソクラテスと同時代の有名なソフィストのヒッピアスが、ギリシャ幾何学の３大問題の一つ『角の３等分』、を解くために考えた曲線で、つぎのように作られます.

図 1 で OABC は正方形で、$\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ は O を中心、半径 OA の４分円です. 点 Q が辺 AB 上を一様な速さで A から B へ、点 R が $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ 上を A から C へやはり一様な速さで動き、時刻 $t=0$ に同時に A を出発し、$t=1$ で同時に終点に到着するとします. 時刻 t での点 Q,R の位置をそれぞれ Q_t , R_t とあらわします. 半径 OR_t と点 Q_t を通り OA に平行な直線との交点を P_t として、$\mathrm{P}_t, 0<t<1,$ の作る曲線が円積曲線です.

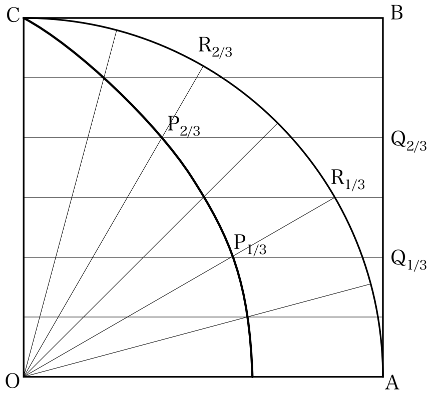

図　1

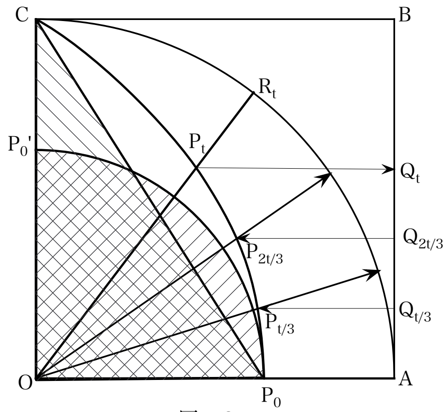

図　2

円積曲線は図 1 のように点 $\mathrm{R}_{1/3}$, $\mathrm{R}_{2/3}$, $\mathrm{Q}_{1/3}$, $\mathrm{Q}_{2/3}$ から始めて角の二等分と線分の二等分を繰り返すことによりたくさんの P_t , ただし $t=\frac{k}{3\cdot 2^n}$、を作図して、それらを滑らかにつなぐと、かなり精密に描くことができます.

円積曲線が作図できれば、角の３等分は簡単です. 図２で、角 R_tOA を３等分するには、半径 OR_t と円積曲線の交点が P_t なのでそこから平行線を引いて Q_t が求まり、AQ_t を３等分して $\mathrm{Q}_{t/3}$, $\mathrm{Q}_{2t/3}$ を求め、それらから平行線を引いて、円積曲線との交点 $\mathrm{P}_{t/3}$, $\mathrm{P}_{2t/3}$ を求め、O と結べば、角の３等分の出来上がりです.

更に３等分だけではなく、AQ_t を $m:n$ に分割することによって、角を任意の比 $m:n$ に分けることも容易にできます. ヒッピアスはさぞ得意がったことでしょう. しかしなぜこの曲線を円積曲線というのでしょう. それは、彼にとっては幸いなことに、ヒッピアスの死後、デイノストラトス（盛時 BC340）がヒッピアスの曲線を用いると３大問題のもう一つの、『円積問題』＝『円と面積の等しい正方形を作れ』が解けることを発見したからです.

ヒッピアスの曲線は $t > 0$ に対してしか定義されませんが、t が 0 に近づくと点 P_t は OA 上の一点 P_0 に近づくことが図からわかります．ここで O を中心、半径 OP_0 の４分円 $\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}'_0}$ の弧の長さ（これも $\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}'_0}$ で表すことにします.）を考えて、**デイノストラトスは** $\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}'_0}$ =AB **であることを発見しました**．このことから図２で４分円 $\mathrm{O}\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}'_0}$ と三角形 COP_0 は面積が等しいことになり、円積問題が解けることになります．

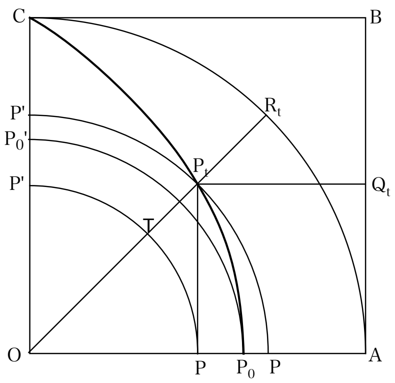

図　3

$\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}'_0}$ =AB の**証明**は簡単で、OA 上の点 P にたいし、OP を半径とする４分円の円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ の長さを考えます．そして、点 P を OP_0 上にとると、$\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$< AB で、$\mathrm{P}_0\mathrm{A}$ 上にとると、$\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$> AB となることを示します．すると丁度 P_0 では $\overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}'_0}$=AB ということになります．

まず P を OP_0 上にとります．P から OA に垂線を立て、円積曲線との交点を P_t とし、R_t , Q_t を求め、OP_t と　$\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ との交点を T とします (図３)．すると円積曲線の作り方から、

$$\overset{\frown}{\mathrm{PT}} : \overset{\frown}{\mathrm{PP'}} = \overset{\frown}{\mathrm{AR}_t} : \overset{\frown}{\mathrm{AC}} = t : 1 = \mathrm{AQ}_t : \mathrm{AB}$$

となります．ところが $\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ < $\mathrm{PP}_t = \mathrm{AQ}_t$ なので $\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ < AB となります．

P が $\mathrm{P}_0\mathrm{A}$ 上にあるときは、$\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ と円積曲線の交点を P_t とすると、前と同様に、$\overset{\frown}{\mathrm{PP}_t}$; $\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ = AQ_t : AB となり、$\overset{\frown}{\mathrm{PP}_t}$ > AQ_t より $\overset{\frown}{\mathrm{PP'}}$ > AB となります．**証明終わり**

デイノストラトスの結果から、円積曲線を図１のように、十分多くの P_t , $t = 1/3 \cdot 2^n$ を作図して、P_0 の位置をできるだけ正確に作図することにより、円周率を計算することができます．OA $= a$ として、図から $\mathrm{OP}_0 = x_0$ を求めます．すると $a = \overset{\frown}{\mathrm{P}_0\mathrm{P}'_0} = \frac{\pi}{2}x_0$ から．$\pi = \frac{2a}{x_0}$ と計算できます．実際に作図した人によると (ヴァン・デル・ウァルデン「数学の黎明」ISBN: 4622024683)、$\pi = 3.14$ 程度の値が得られるそうです．

三角関数を用いて

ここまでは、数学的知識をほとんど必要としない（でも、ここまで読んでこられた人は相当な数学的能力の持ち主だと思います.）直感的な話でした．しかし例えば、$\lim_{t\to 0} P_t = P_0$ の存在を論理的に示したり、作図による π の値の計算精度を考えたりするには、数 III 程度の数学が必要です．これからは角度はすべて弧度法で表し、三角関数の知識を仮定します．

O を原点とし、$\mathrm{A} = (a, 0)$ として $\mathrm{P}_t = (x_t, y_t)$ とすると、$y_t = at$ で、直線 OP_t の方程式は、$y = (\tan\frac{\pi}{2}t)x$ なので、$x_t = \frac{at}{\tan\frac{\pi}{2}t}$ となります．ここでよく知られた極限値、$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ により、$x_0 = \lim_{t\to 0} x_t = \frac{2a}{\pi}$ となり、極限点 P_0 の存在とデイノストラトスの結果 $\frac{\pi}{2}x_0 = a$ がわかります．

また $\mathrm{OP}_t = l_t$ とすると、$l_t = \sqrt{x_t^2 + y_t^2} = \frac{at}{\sin\frac{\pi}{2}t}$ となり、$0 < x < \frac{\pi}{2}$ で成り立つ不等式

$\sin x < x < \tan x$ を用いると、

$$x_t = \frac{at}{\tan \frac{\pi}{2} t} < \frac{2}{\pi} a < \frac{at}{\sin \frac{\pi}{2} t} = l_t$$

となり、これから、$\frac{2a}{l_t} < \pi < \frac{2a}{x_t}$ と上からと下からの近似値を求めることができます．

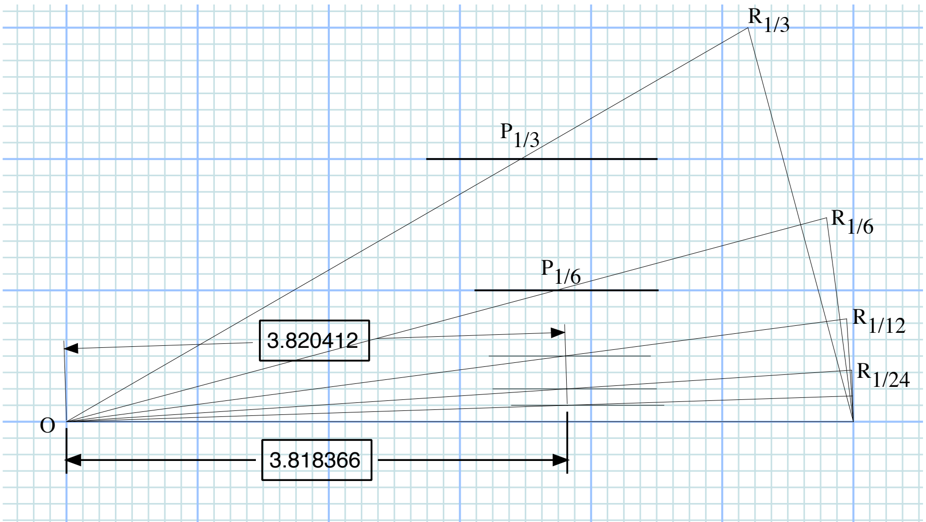

図 4： $l_{1/48}$ と $x_{1/48}$（$a=6$）

上はドローソフト（ MacOSX 用の EazyDraw というシェアウェア) で、$a = 6$ (インチ) として $\mathrm{P}_{1/48}$ の位置を求め、$l_{1/48} = 3.820412$ と $x_{1/48} = 3.818366$ を測った図です．この結果から、$3.1410 < \pi < 3,1427$ という評価が得られます．(EazyDraw は内部の計算を単精度でやっているようで、上の二つの値の正しい数値は、3.820400... と 3.818355... です．$\mathrm{P}_{1/96}$ の位置は信頼すべきものが求められませんでした．)　なお上のデータから、Taylor 展開を使うと、π の近似値として 3.14157...、四捨五入して 3.1416 という値が得られるのですが、これについては省略します．

以上の計算法を少し反省してみます．

$\frac{2a}{l_t} < \pi < \frac{2a}{x_t}$ に $l_t = \frac{at}{\sin \frac{\pi}{2} t}, x_t = \frac{at}{\tan \frac{\pi}{2} t}$ を $t = 1/n$ として代入し計算すると、

$$(2n)\left(2 \sin \frac{\pi}{2n}\right) < 2\pi < (2n)\left(2 \tan \frac{\pi}{2n}\right)$$

となります．このことから、π を $\frac{2a}{l_{1/n}}, \frac{2a}{x_{1/n}}$ で近似することは、円周を円に内・外接する正 $2n$ 角形で近似するという、最も素朴な方法と、結果は同じであることがわかります．