

# Educação matemática dos futuros professores

*O tema é realmente muito difícil. Trabalhei nestes 20 anos com futuros professores e creio ter percebido que, em qualquer dos dois aspectos que me parecem fundamentais (o gosto pela Matemática e o gosto por ser professor de Matemática), os casos de sucesso – houve alguns! – parecem-me ter sido aqueles em que ajudei ou encorajei algo que já existia nos estudantes. Se isto é verdade, então o percurso deles até ao 4º ano da licenciatura já é determinante de muita coisa (nunca é tudo mas...).*

*[...] Portanto, o meu primeiro ponto nesta discussão é a ideia de que haverá uma parte da formação inicial em Matemática que é sobre Matemática e não sobre como ensiná-la, mas em que – para um futuro professor – poderá ser muito importante a relação que ele estabelece com a Matemática enquanto aluno.*

Paulo Abrantes, *comunicação pessoal* <sup>1</sup>

Nas últimas décadas foram desenvolvidos múltiplos esforços, no seio da comunidade portuguesa da educação matemática, para melhorar o ensino da Matemática nos ensinos básico e secundário. Um amplo debate tem identificado os diversos factores que condicionam essa melhoria – condições de trabalho dos alunos e dos professores nas escolas e qualidade dos programas, entre outros. Ao mesmo tempo, teses de mestrado e de doutoramento em educação matemática têm sido defendidas por investigadores portugueses, muitas delas dizendo respeito ao desenvolvimento profissional dos professores e às suas concepções e práticas pedagógicas.

Estranhamente – ou talvez não – a questão da preparação matemática dos professores não foi escolhida até hoje como objecto de estudo da investigação portuguesa em educação matemática. É certo que no referido debate é frequentemente levantada a necessidade de melhor formação dos professores. Mas está-se em geral a falar de formação contínua de carácter pedagógico ou didáctico, e não de *formação matemática inicial* dos professores. Julgo que tal facto é em parte natural. Por um lado muito parece ter sido finalmente compreendido, nas últimas décadas, sobre o modo como se aprende, em particular matemática, e por outro lado recursos novos estão constantemente a ser postos á disposição dos professores, sobretudo tecnológicos. Isso obriga a esforços de actualização permanentes no que diz respeito às metodologias, e estes devem continuar e atingir progressivamente um maior número de professores. Mas sem termos um conhecimento profundo da matemática fundamental que deve ser objecto da experiência dos nossos alunos, de nada nos serve a didáctica. Tudo leva a crer, pelas investigações e estudos feitos recentemente, sobretudo na América do Norte, que a formação matemática dos futuros professores não proporciona esse conhecimento profundo nem prepara os professores para o adquirirem ao longo da sua vida profissional. Pessoalmente, a minha experiência na formação contínua de professores, nos últimos anos, tem-me deixado inteiramente convicto que assim é.

Temos sempre que voltar a Dewey... Embora de maneira geral e não no caso específico da matemática (pelo que adaptámos o texto que vamos transcrever), Dewey descreve com muito cuidado as relações entre os três pólos da educação matemática: matemática (*subject-matter*), professor e aluno. Diz ele, a propósito do conhecimento que o professor deve ter da *subject-matter*:

*O conhecimento das ideias [matemáticas] que foram atingidas no passado devido à actividade [dos matemáticos] coloca o professor em posição de compreender o significado das reacções impulsivas e aparentemente sem objecto dos jovens, e de proporcionar os estímulos necessários para os orientar de modo a que cheguem a algum lado. [...]. A presente organização [dos conhecimentos matemáticos] representa o fruto maduro de experiências como as deles, experiências envolvendo o mesmo mundo, e capacidades e necessidades semelhantes às deles.*<sup>2</sup>

Neste texto, começarei por identificar e descrever brevemente algumas investigações (Tommy J. Bryan, Deborah Ball, Liping Ma) nos EUA, que levam a crer que este tipo de conhecimento matemático, essencial para o ensino, não está presente em muitos professores (do ensino elementar e do ensino secundário) e não é adquirido na sua formação inicial. Em segundo lugar, comentarei as recomendações publicadas a este respeito pelo *Conference Board of the Mathematical Sciences* (a que pertencem a *American Mathematical Society* e o *National Council of Teachers of Mathematics*). Em terceiro lugar, descreverei algumas propostas de “bons” exemplos e modelos de educação matemática dos futuros professores. Tentarei depois mostrar como Felix Klein e Henri Lebesgue revelavam, já na primeira metade do séc. XX, um tipo semelhante de preocupações relativas à preparação matemática dos futuros professores. Finalmente adiantarei algumas reflexões pessoais sobre este tema.

## **Tommy J. Bryan. *The conceptual knowledge of preservice secondary mathematics teachers: How well do they know the subject matter they will teach?***

Os participantes deste estudo foram nove estudantes, futuros professores do ensino secundário, que estavam a fazer a licenciatura numa universidade americana. Todos tinham feito cadeiras de matemática correspondentes a mais de metade das que lhes eram exigidas (*Calculus I, II e III, Linear Algebra,*

*Statistical Methods, Modern Geometry, Introduction to Analysis*) e quando foram entrevistados estavam a mais de metade do semestre em que completariam as restantes. As classificações obtidas nas cadeiras completadas eram bem acima da média. Nenhum deles tinha ainda feito ou iniciado cadeiras correspondentes à parte “educacional” do curso.

Durante as entrevistas individuais foram explorados os seguintes tópicos, considerados “correntes” no ensino secundário (entre parêntesis algumas questões concretas sobre as quais incidiram as entrevistas):

1. Expoentes: significado do expoente zero, e dos expoentes negativos, racionais e irracionais. ( $2^0=1$ ;  $2^{-3}=1/2^3$ ;  $2^{1/2}=\sqrt{2}$ ;  $2^{3/2}=\sqrt{(2^3)}$  ou  $(\sqrt{2})^3$ ;  $2^\pi$  ou  $2^{\sqrt{2}}$  é um número real;  $0^0$  é indeterminado;  $b^m \cdot b^n=b^{m+n}$ ;  $b^m \div b^n=b^{m-n}$ ;  $(b^m)^n=b^{m \cdot n}$ ).
2. Divisão e fracções: divisão por zero, divisão por uma fracção, multiplicação por uma fracção. ( $2 \div 0$  é indefinido;  $0 \div 0$  é indeterminado;  $(a/b) \div (c/d)=(a/b) \cdot (d/c)$ ;  $(a/b) \cdot (c/d)=(ac/bd)$ ).
3. Operações com inteiros: subtracção de um inteiro negativo, produto de inteiros. ( $2 - (-3)=5$ ;  $2 \cdot (-3)=-6$ ;  $(-2) \cdot (-3)=6$ ).
4. Declive e rectas: declive de uma recta horizontal ou vertical, equação reduzida da recta, declives de rectas paralelas e perpendiculares. ( $y=mx+b$ ; significados de “m” e “b”)
5. Outros tópicos de álgebra: multiplicação de dois binómios, fórmula resolvente da eq. do 2º grau, fórmula da distância, transformações do gráfico de uma função (deslocação vertical  $y=x^2+4$ ; deslocação horizontal  $y=(x+4)^2$ )
6. Trigonometria:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .
7. Fórmulas da geometria: área de um triângulo, perímetro e área de um círculo.

O objectivo das entrevistas era avaliar o conhecimento matemático<sup>3</sup> (*conceptual knowledge*) dos participantes no estudo relativamente a estes tópicos. Por essa razão, nas entrevistas, pequenos erros nos procedimentos não eram considerados, passando-se logo à abordagem do conhecimento matemático. Excepto na questão  $0^0=?$ , em que apenas dois dos nove futuros professores responderam correctamente, ao nível dos procedimentos e das respostas (independentemente da justificação) praticamente todos os nove futuros professores acertaram em todas as questões. No entanto, quando interrogados sobre a justificação das respostas ou dos procedimentos (*explanation* — aspecto do conhecimento matemático directamente pesquisado neste estudo), os resultados foram os seguintes:

- Das  $279 = 9$  (participantes)  $\times 31$  (questões) possibilidades de mostrar conhecimento matemático, em 46 isso não foi possível devido a (grandes) dificuldades nos procedimentos ou cálculos ou à declaração de que não existia justificação (exemplo: “é arbitrário, é uma coisa que se tem que ter decorado”) [e em 2 houve problemas externos à investigação];
- Relativamente às 231 possibilidades que restaram:
  - em 37% não foi apresentada qualquer justificação;
  - em 37% foram apresentadas justificações incorrectas;
  - em 26% foram apresentadas justificações correctas.
- Globalmente, pode dizer-se que a percentagem de sucesso foi de 22%.

O autor do artigo que estamos a analisar transcreve partes das entrevistas com alguns dos participantes que são muito reveladoras de como a passagem da execução correcta de um destes cálculos para a sua justificação, mesmo em questões tão correntes da matemática elementar, é um passo muito difícil para estes estudantes que serão professores dentro de um ou dois anos. Nessas entrevistas percebe-se que nestes alunos, que já fizeram várias cadeiras de cálculo, persistem as mesmas confusões e obstáculos de compreensão que encontramos nos alunos do ensino secundário (por exemplo, a respeito das medidas dos ângulos: “x é um ângulo, mas quando temos um gráfico, não é um ângulo, é um número decimal”, “a medida de um ângulo em radianos é um múltiplo de  $\pi$ , e portanto 1 não é uma medida de ângulo em radianos”, etc.)! Os próprios estudantes ficam confusos ao perceber isso. Como diz Carla:

*Existe uma sentimento de insegurança quando temos que explicar estas coisas tão simples, e é suposto que eu seja capaz disso. Estou a trabalhar agora em coisas muito difíceis e estou a ter bastante dificuldade nisso, mas... é mais difícil fazer isto do que essas coisas difíceis [...]. E isto é aquilo que é mais central para mim, este tipo de informação, pois é aquilo que eu vou ter que ensinar... Passei muito tempo nas escolas a fazer observações e tudo isso, mas não pensei com profundidade sobre a matéria em si mesma.*

Como refere o autor do estudo, não é legítimo generalizar a partir do que se constata em 9 estudantes de um determinado programa de preparação de professores, embora outros estudos recentes apontem na mesma direcção (como veremos mais a frente). No entanto, não pode deixar de ser “perturbante” constatar que alguns — quase todos em relação a algumas questões — dos nove participantes não tinham qualquer conhecimento matemático sobre ideias da matemática elementar que fazem parte sem qualquer dúvida dos tópicos que qualquer professor do secundário tem que ensinar. Perturbante também que o seu bem sucedido percurso universitário em matemática não só não lhes tivesse “trazido conhecimentos substanciais em relação à matemática elementar” como se tivesse mostrado possí-

vel “sem um conhecimento profundo de matérias que deveriam presumivelmente ser pré-requisitos”. Apesar disso, esse mesmo percurso irá certificar esse futuros professores para ensinar conteúdos que em larga medida estão “memorizados e não compreendidos”.

**Deborah Ball. *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education.***

No prefácio do relatório *The Mathematical Education of Teachers*, da *Conference Board of Mathematical Sciences*, que será comentado mais à frente, afirma-se que:

*Devemos á investigação em educação matemática da última década a compreensão de que é necessário um conhecimento substancial de matemática mesmo para ensinar bem a aritmética dos números inteiros. Alguns investigadores em educação matemática, em particular Deborah Ball e Liping Ma, foram capazes de comunicar estes resultados da investigação de modo a cativar o interesse de matemáticos profissionais. O currículo dos middle grades (2º e 3º ciclos) é ainda mais exigente; por exemplo, a estrutura dos números racionais e a ideia de proporcionalidade requerem ainda um maior conhecimento por parte dos professores. A matemática do ensino secundário é frequentemente considerada mais substantiva do que a dos anos anteriores, mas os desafios relativos ao desenvolvimento de um conhecimento matemático para a ensinar não são tidos, muitas vezes, em consideração.<sup>4</sup>*

É impossível abordar aqui, mesmo de forma resumida, os detalhes das investigações de Deborah Ball e Liping Ma. Apenas faremos alguns comentários aos seus trabalhos principais.

Deborah Ball iniciou a sua vida profissional em 1974 como professora do 5º ano, tendo como principais estudos universitários as línguas francesa e inglesa. Pretendendo ensinar outras disciplinas, reconheceu que necessitava de aprender por si própria matemática para poder melhorar o seu ensino. O seu interesse pela educação matemática desenvolveu-se a partir daí, e hoje é formadora de professores e professora de educação matemática na Universidade de Michigan. É actualmente responsável por dois projectos de investigação em educação, um deles – *Mathematics Teaching and Learning to Teach Project* – em colaboração com um matemático profissional, tendo como um dos objectivos analisar em detalhe o trabalho dos professores e as implicações que a sua preparação em matemática tem na qualidade do seu ensino.

O título que indicamos acima refere-se à sua dissertação para o doutoramento na Universidade de Michigan (*Department of Teacher Education*), realizado em 1988. Deborah distingue três “tipos” de ensino da matemática: *tradicional*, *conceptual* e (um terceiro a que chama) *pedagogia matemática*. Cada um desses tipos comporta uma ideia sobre a própria matemática e ainda perspectivas diferentes sobre o seu ensino e aprendizagem, sobre os alunos e sobre o contexto da sala de aula. Na *pedagogia matemática*, que está subjacenteem todo este trabalho, privilegia-se “não apenas a substância da matemática mas a sua natureza e epistemologia. Tão central como a compreensão dos conceitos matemáticos e dos procedimentos [menosprezada no ensino tradicional mas valorizada no ensino conceptual] são a compreensão do que significa fazer matemática, a capacidade de validar as próprias respostas, a apreciação da relevância da matemática para além da utilidade quotidiana corrente” (p. 8).

No decurso da sua investigação, Deborah Ball entrevistou 19 estudantes, futuros professores dos ensinos básico e secundário de Matemática, no momento em que iam iniciar o primeiro curso educacional. Tendo como base a pedagogia matemática, desenhou un quadro de referência relativo ao conhecimento e crenças necessários para esse tipo de ensino. Com os dados recolhidos nas entrevistas sobre o conhecimento e crenças dos participantes neste estudo, “a intenção era rever e reformular esse quadro de referencia preliminar”. Naturalmente, com esse fim, Deborah pretendia com as entrevistas “aprender o que os futuros professores sabiam, acreditavam, pensavam e sentiam sobre matemática, sobre o seu ensino e aprendizagem, e sobre os alunos como aprendizes de matemática”.

É impossível separar, num futuro professor, o conhecimento matemático das suas convicções relativamente ao modo como as crianças aprendem matemática! E este é apenas um exemplo de muitas impossibilidades análogas! No entanto, embora com a consciência de que tal é muito redutor em relação ao trabalho de Deborah Ball, vamos apenas referir as reflexões e conclusões relativas ao conhecimento matemático dos participantes deste estudo para tentar manter o foco deste texto na preparação matemática dos futuros professores. De resto, como Ball salienta, mesmo quando estamos a considerar o conhecimento matemático, ou mais explicitamente, o conhecimento *de* matemática e o conhecimento *acerca da* matemática, estas categorias podem, por vezes, ser difíceis de distinguir. Por exemplo, saber como “respostas certas são justificadas” em matemática pertence ao domínio do conhecimento *acerca de* matemática, e no entanto esse conhecimento mostrou, nesta investigação, ter consequências óbvias nas “explicações” dadas pelos futuros professores — que dizia respeito ao seu conhecimento *de* matemática...

## Perímetro e área

Entre as diversas questões colocadas nas entrevistas, transcrevemos apenas uma dizendo respeito ao conhecimento matemático, juntamente com alguns comentários.

A questão é a seguinte<sup>5</sup>:

Imagine que uma das suas alunas entra na aula muito entusiasmada e diz que tem um teorema que nunca tinha sido apresentado na aula. Explica que quando o perímetro de uma figura aumenta, a área também aumenta. Mostra esta figura para mostrar que o que está a dizer é verdade.

perímetro = 12 cm  
área = 9 cm<sup>2</sup>

perímetro = 14 cm  
área = 12 cm<sup>2</sup>

Como responderia a esta aluna?

É interessante perceber o que Deborah Ball pretendia compreender a partir das respostas dos futuros professores, pelo que transcrevemos parte das suas considerações (acrescentamos uma numeração das questões – (i), (ii), ... – para depois referenciar as constatações de D. Ball):

*Existem duas dimensões nesta questão. Uma tem a ver com os conceitos específicos de perímetro e área e a sua relação. Outra tem a ver com o conhecimento matemático e a justificação desse conhecimento — “teorema” e “demonstração”. A aluna afirma ter “descoberto um teorema” e apresenta uma figura como “demonstração”. Um exemplo, no entanto, não prova a verdade de uma generalização. A aluna apenas ilustrou, não provou, a sua afirmação. A sua afirmação é uma conjectura, não um teorema.*

*Eu queria ver se os futuros professores dariam atenção a esta dimensão da questão. (i) Ficariam eles convencidos pela figura ou cépticos? (ii) Se ficassem cépticos, queria saber o que eles considerariam suficiente evidência da verdade da afirmação, e como eles procederiam para a encontrar. (iii) Reagiriam às concepções de teorema e demonstração da aluna ou centrariam a sua atenção na substância da sua afirmação? (iv) Queria também perceber se os futuros professores sabiam que não existe relação directa entre perímetro e área. (v) Previa que muitos deles não estariam seguros, e estava interessada em aprender o que os fazia inseguros — se era a falta de uma boa demonstração, se era não conseguirem lembrar-se, se era estarem inseguros sobre de que forma em matemática se decide se uma afirmação é verdadeira em geral.*

Alguns aspectos da análise das entrevistas:

(i) 8 participantes (5 dos quais preparando-se para o ensino secundário) ficaram convencidos e disseram sem hesitação que elogiariam a aluna pela sua “descoberta”. Cindy (uma candidata do ensino secundário) examinou durante algum tempo a figura da aluna e disse que a afirmação era verdadeira e que diria à aluna que “era uma muito boa observação”. Além disso, forneceria ainda à aluna mais um exemplo ilustrando a sua teoria, com uma frase do tipo: “na nossa aula o comprimento das paredes é

pequeno, mas pensa no refeitório, vê como são longas as paredes... levás muito mais tempo a andar ao longo das paredes do refeitório do que a fazê-lo na nossa aula”.

Mei Ling nem sequer olhou para a figura nem reflectiu sobre a afirmação da aluna:

*Diria: "É fantástico [...] é maravilhoso que tenhas ido para casa, pensado nisto e voltado com uma nova ideia". Acrescentaria: "É certo que não mencionei este facto na aula, mas tens absoluta razão. Houve alguém que descobriu isto, mas realmente não o referi na aula. Hoje vou falar nisso porque tens razão. Não o disse antes e é um importante facto verdadeiro".*

Três estudantes disseram imediatamente que era errado o que a aluna dizia – que só era verdade em alguns casos e noutros não.

(ii) Mesmo estes três estudantes, no entanto, não levantaram nunca a questão da aluna apenas ter apresentado um exemplo. Alguns estudantes, dos que ficaram cépticos, “não se lembravam” se a afirmação era verdadeira e iriam pensar na questão. Outros iriam recorrer a livros ou perguntar a alguém. A incerteza resultava de não se lembrarem de alguns conceitos – “o que é a área?”; “é uma hipótese razoável que se o parâmetro (sic) aumenta a área *dentro* também vá aumentar”.

(iii) Mais de metade dos estudantes “interessaram-se apenas pela substância da afirmação da aluna, e responderam em termos do que *eles* sabiam sobre perímetro e área e das relações entre as duas medidas. Não fizeram comentários sobre o modo como a aluna chegou á sua conclusão. Em lugar disso, preocuparam-se apenas em dizer á aluna se estava certa ou errada”.

Apenas 4 futuros professores (dirigidos para o ensino secundário) falaram explicitamente em demonstração, dizendo que “discutiriam com a aluna especificamente” esta questão.

(iv) Quase metade dos futuros professores julgavam que o perímetro e a área estavam directamente relacionados (mais de metade dos futuros professores do ensino secundário). Dos 19 estudantes, apenas 3 sabiam que a afirmação da aluna era errada.

(v) “Para a maior parte dos estudantes, a base para justificar ou refutar a afirmação da aluna residia no fundo da sua memória, no seu conhecimento acumulado de matemática.”

Os estudantes que não estavam seguros da afirmação da aluna, pareciam conscientes de que a “demonstração” da aluna era insuficiente. Mas Deborah Ball suspeita que, “se fossem capazes de se lembrar se a ‘teoria’ da aluna era verdadeira ou falsa, deixariam de estar preocupados com a ‘demonstração’ da aluna, como os 11 estudantes que ‘sabiam’ que era verdadeira (ou falsa)”

### ***Pôr em questão algumas ideias feitas***

Tendo por base a exploração e análise das entrevistas, Deborah Ball levanta sérias objecções relativamente a três “pressupostos comuns” sobre a preparação matemática dos futuros professores<sup>6</sup>:

Pressuposto #1. *O conteúdo tradicional da matemática escolar é simples.*

Como escreve Deborah Ball, a mensagem implícita neste pressuposto sobre os tópicos da matemática escolar é a seguinte: “se sabes *fazê-los* correctamente, então és capaz de os ensinar”. Está implícita uma redução do conhecimento matemático à *lembrança* de como *se executa* correctamente um procedimento (operação numérica, cálculo algébrico, procedimento do cálculo infinitesimal elementar). Bem podem os “educadores matemáticos” promover um ensino que passe para lá dos procedimentos e atinja os conceitos, as conexões, e a procura da evidência matemática. Se não forem eles próprios, nas suas aulas de didáctica, “a *revisitar* a matemática *simples* para explicitar as justificações e as conexões, para não falar da própria correcção dos resultados, os futuros professores estarão completamente impreparados para fazer mais do que ensinar “inverte-se e multiplica-se”.

Pressuposto #2. *As aulas de matemática dos ensinios básico e secundário podem servir como preparação matemática dos futuros professores.*

Deborah Ball refere a este propósito que nas entrevistas, mesmo os futuros professores do secundário que já tinham feito 7 cadeiras de matemática na universidade, quando queriam responder às suas questões ou executar as tarefas propostas, “eram forçados a voltar a pensar nos conteúdos do seu sétimo ano. Ao fazer isso, procurando recordar conceitos, procedimentos, ou simples termos, o que encontravam eram fragmentos dispersos – regras, truques e definições – não explícitos e desconexos”. Isto é compreensível, pois sabemos que o acento tónico da maior parte das aulas de matemática que estes estudantes frequentaram foi a aprendizagem e mecanização de técnicas de cálculo.

O facto dos futuros professores, por exemplo nas universidades e na sua formação matemática, não abordarem ou abordarem em dimensão insignificante conteúdos da matemática elementar, revela que este pressuposto é aceite ou mesmo defendido por grande parte dos professores encarregados dessa formação.

Por exemplo, a propósito dos conteúdos dos cursos de matemática, nomeadamente dos universitários, Ana Bela Cruzeiro, presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, afirma que

*O saber, não só não ocupa lugar, como abre caminhos para novos saberes. Sejamos exigentes. Saber mais abre-nos horizontes mais vastos, faz-nos subir a outras alturas para dominar campos largos, desconhecidos. É esta subida que os professores, designadamente os universitários, devem ajudar os seus discentes a fazer. [e referindo-se depois aos futuros professores e à "matéria que eles irão mais tarde transmitir [sic] aos alunos do secundário"] É que esta até já deve estar sabida à entrada da universidade.*<sup>7</sup>

Graciano de Oliveira, ex-presidente da SPM e professor na Universidade de Coimbra, afirma na mesma linha que "quando um aluno entra na Universidade já travou conhecimento com o essencial do que irá ensinar se vier a ser professor".<sup>8</sup>

Pressuposto #3. *Estudos universitários de matemática asseguram um conhecimento matemático para o ensino.*

Deborah Ball encontrou uma menor diferença do que seria de esperar, no que diz respeito à

*compreensão substancial da matemática, entre os futuros professores do ensino elementar e do secundário. Embora os últimos tivessem tido mais matemática e conhecessem mais 'matéria', isto não parecia conferir-lhes uma vantagem substancial na capacidade de articular e relacionar conceitos, princípios e significados subjacentes à matemática escolar."*

Isto embora muitos dos futuros professores do secundário participantes neste estudo fossem bons estudantes, com excelentes classificações nos exames de admissão à universidade e nas cadeiras de matemática. D. Ball avança uma explicação para aquela conclusão do seu estudo:

*Mesmo a frequência com sucesso em cadeiras de matemática tradicionais não desenvolve necessariamente os tipos de compreensão requeridos para o ensino, se, como é o caso muitas vezes, o sucesso nestas cadeiras resulta da memorização de fórmulas e da execução de procedimentos. Além disso, estudar cálculo não dá habitualmente oportunidade aos estudantes de visitar ou ampliar os seus conhecimentos de aritmética, álgebra e geometria, os temas que vão ensinar.*

### **Subject matter knowledge**

Terminamos com um muito breve resumo das conclusões de D. Ball relativamente ao *subject matter knowledge* dos 19 futuros professores que participaram no seu estudo. A investigadora engloba nestes temos o conhecimento sobre a matemática (como disciplina científica), o conhecimento matemático (*substantive*) e a atitude (*disposition*) perante a matemática.

#### *Conhecimento sobre a matemática*

De uma maneira geral, os 19 estudantes não tinham uma perspectiva da matemática como disciplina científica. Pensavam a matemático como um "assunto escolar: um conjunto de regras e procedimentos mais ou menos interligados" e pouco tinham reflectido sobre a natureza da matemática, "tendendo a supor que 'fazer matemática' era seguir procedimentos e chegar às respostas certas". Poucos concebiam a matemática como um domínio onde podia existir "argumentação e interpretações alternativas".

#### *Conhecimento matemático*

Os 19 futuros professores apresentavam diferenças na natureza do seu conhecimento matemático. No entanto, "poucos foram capazes de articular explicitamente significados e princípios subjacentes aos tópicos tratados". Mostraram-se inseguros e frequentemente incorrectos nas suas respostas. O seu conhecimento era fragmentado, desconexo.

#### *Atitude perante a matemática*

Também neste ponto D. Ball detectou grandes diferenças entre os 19 futuros professores. Enquanto alguns, não muitos, se mostravam muito ansiosos – "petrificados", expressão usada pela investigadora – face à matemática, outros aceitavam o facto de não "se sentirem à vontade com a matemática". Outros ainda mostravam-se confiantes nos seus conhecimentos de matemática, não dando conta do seu conhecimento fragmentado e mesmo incorrecto. Apenas 3 futuros professores se mostravam entusiásticos acerca da matemática.

### **Liping Ma. *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers understanding of fundamental mathematics in China and the United States.***<sup>9</sup>

Durante a Revolução Cultural, Liping Ma, uma jovem aluna do 7º ano em Xangai, foi enviada para uma área rural da República Popular da China, tal como milhares de outros estudantes. Depois de alguns meses de "reeducação", ficou surpreendida ao ser-lhe pedido para se tornar professora da escola primária da aldeia onde estava. Começou aí a sua carreira na educação. Actualmente trabalha como investigadora na *Carnegie Foundation for the Advancement of Sciences*. Fez o mestrado em educação na

Universidade Normal do leste da China e o doutoramento na Universidade de Stanford. A sua tese foi publicada em livro em 1999, com o título que indicamos acima. Alan Schoenfeld comenta desta forma as reacções à sua difusão ainda em forma de manuscrito:

*[O manuscrito de Liping] é já um sucesso, mesmo antes de publicado, talvez o único manuscrito que conheço que conquistou a atenção e o favor de ambos os lados das "math wars". Muitos matemáticos de categoria internacional estão entusiasmados com ele; nos encontros anuais de matemáticos, pessoas como [...] faziam propaganda do livro. Porque o livro diz que o conhecimento matemático é um factor decisivo. Mas, ao mesmo tempo, aqueles que assumem uma perspectiva de reforma – aqueles que valorizam uma visão profunda e conexa do pensamento matemático e que compreendem que a competência dos professores comporta um conhecimento matemático alargado, incluindo um amplo conhecimento de conteúdos pedagógicos – acham que o livro oferece valiosas ideias acerca das questões do conteúdo matemático, e da preparação e desenvolvimento profissional dos professores.<sup>10</sup>*

A tese da Liping Ma vem na linha dos trabalhos de Deborah Ball e de outros investigadores americanos. Certamente uma das razões do interesse que tem despertado nos Estados Unidos é o facto de, nesta época de comparações internacionais do sucesso ou insucesso em matemática dos alunos – TIMSS e outras –, este estudo comparar agora o conhecimento matemático dos seus professores – no caso, chineses e americanos.

Na procura de uma explicação dos resultados desfavoráveis dos alunos americanos, relativamente a alunos de outros países, estudos tinham sido feitos sobre a formação matemática dos professores. E concluiu-se que "em termos dos cursos feitos para essa formação, o caso dos professores americanos era comparável com o dos outros países". Mas a abordagem do estudo de Liping Ma é muito diferente: em lugar de comparar o número de cadeiras de matemática, Liping Ma pretende comparar o conhecimento matemático dos professores relativo aos tópicos de matemática elementar que devem ensinar aos seus alunos. E parece poder concluir-se que o sucesso nos cursos de formação inicial em matemática dos futuros professores não implica uma profunda compreensão da matemática elementar que vão ensinar. Como vemos, Ma retoma assim as objecções de Deborah Ball relativamente ao pressuposto #3: "Estudos universitários de matemática asseguram um conhecimento matemático para o ensino".

Liping Ma utiliza, nas suas entrevistas aos professores (23 americanos e 72 chineses), quatro questões que tinham sido imaginadas e construídas por Deborah Ball. Além da questão relativa ao perímetro e área já referida (a mais complexa das quatro), as outras três são as seguintes:

1) *Vamos durante algum tempo reflectir sobre um tópico que faz parte daqueles que ensina, a subtracção com "reagrupamento". Observe estes problemas:*

$$\begin{array}{r} 52 \quad 91 \\ -25 \quad -79 \\ \hline \end{array}$$

*Como os abordaria se estivesse a ensinar alunos do 2º ano? O que considera que os alunos teriam que compreender ou saber fazer antes de começarem a aprender a subtracção com "reagrupamento"?*

2) *Alguns professores do 6º ano notaram que muitos dos seus alunos estavam a fazer o mesmo erro na multiplicação de números grandes. Ao tentarem calcular  $123 \times 645$  os alunos pareciam esquecer-se de "mover os produtos parciais" para a esquerda em cada linha.*

	123		123
	<u>×645</u>		<u>×645</u>
<i>Estavam a fazer isto</i>	615	<i>em vez de isto</i>	615
	492		492
	<u>738</u>		<u>738</u>
	1845		79335

*Embora estes professores estivessem de acordo no facto de isto constituir um problema, não chegaram a acordo sobre o que fazer para o resolver. O que faria se fosse professor do 6º ano e notasse que vários dos seus alunos estavam a proceder assim?*

3. *Parecem existir diferentes abordagens na resolução de problemas que envolvam divisões com fracções. Como resolveria o seguinte problema?*

$$1\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} =$$

*Imagine que está a ensinar a divisão com fracções. Para tornar esta operação significativa para os alunos, o que muitos professores fazem é tentar relacionar a matemática com outras coisas. Algumas vezes tentam imaginar situações do mundo real ou story-problems que mostrem a aplicação de determinado conteúdo. O que consideraria um bom story-problem ou modelo para a divisão indicada?*

Do ponto de vista da preparação académica, os professores americanos apresentavam-se muito à frente dos chineses. Estes tinham feito 9 anos (correspondentes á nossa educação básica) e mais três na Escola Normal (de preparação de professores para o nível elementar).

Quanto a conclusões e outros aspectos desta investigação, não pretendemos resumir aqui um livro de 160 páginas, mas apenas sugerir a sua leitura a quem se interesse pela preparação matemática dos futuros professores. Apenas algumas notas:

- apesar da sua preparação académica muito menos longa, os professores chineses responderam às questões, de um modo geral, como se espera que um professor de matemática o faça, ao passo que os professores americanos revelaram deficiências preocupantes;
- no que diz respeito às duas primeiras questões, embora ambos os grupos fizessem e descrevessem os cálculos a fazer correctamente, apenas 20% (na primeira) e 40% (na segunda) dos professores americanos conseguiram explicar a origem e a razão dos procedimentos adoptados, contra cerca de 90% dos professores chineses (em ambas as respostas);
- na terceira questão, a diferença entre os dois grupos estendeu-se à capacidade de fazer correctamente a operação (menos de metade nos professores americanos e a totalidade nos chineses), e apenas um professor americano conseguiu inventar uma história relativamente aceitável de que a operação pudesse ser modelo contra mais de 90% dos professores chineses (que em alguns casos até sugeriram múltiplos problemas ilustrando diversas interpretações da divisão)
- na quarta questão, os professores americanos exibiram as mesmas dificuldades, na análise da matemática envolvida, que os estudantes universitários referidos atrás acerca da mesma questão da área e do perímetro, enquanto cerca de 70 % dos chineses chegaram à compreensão matemática do problema, apresentando contra-exemplos.

No decorrer do seu texto, Liping Ma introduz mais um conceito relativo ao conhecimento matemático, a *profound understanding of fundamental mathematics* (PUFM). Mais do que tentar “criar” um novo termo em português, parece-me útil transcrever as características que Ma atribui a este grau do conhecimento matemático (decorre do texto que se trata de um grau próprio dos professores, a atingir no seu desenvolvimento profissional):

*Conectividade. Um professor com um PUFM tem a intenção geral de fazer conexões entre conceitos matemáticos e procedimentos, desde conexões simples e superficiais entre partes isoladas do conhecimento até conexões, complexas e subjacentes, entre diferentes operações e subdomínios matemáticos. Quando reflectida no ensino, aquela intenção evita que a aprendizagem dos alunos seja fragmentada. Em lugar de aprenderem tópicos isolados, os alunos aprenderão um corpo unificado de conhecimentos.*

*Múltiplas perspectivas. Aqueles que atingiram um PUFM apreciam os diferentes aspectos de uma ideia e as várias abordagens à resolução de uma questão, assim como as suas vantagens e inconvenientes. Além disso, são capazes de fornecer explicações matemáticas desses aspectos e abordagens. Deste modo, os professores poderão guiar os seus alunos em direcção a uma compreensão flexível da disciplina.*

*Ideias básicas. Professores com um PUFM têm uma atitude favorável à matemática e estão particularmente atentos aos “simples mas poderosos conceitos e princípios básicos da matemática” (por exemplo, a ideia de equação). Têm tendência a visitar e reforçar essas ideias básicas. Ao centrarem a sua atenção nessas ideias básicas, os alunos não são apenas encorajados a abordar problemas, mas são conduzidos a desenvolver actividade matemática real.*

*Coerência Longitudinal. Professores com um PUFM não estão limitados ao conteúdo que deve ser ensinado num certo ano de escolaridade; em lugar disso, têm um conhecimento profundo de todo o currículo matemático elementar. Estão preparados para aproveitar sempre uma oportunidade para rever conceitos cruciais que os alunos estudaram anteriormente. Além disso, sabem o que os alunos vão aprender a seguir, e aproveitam as oportunidades para estabelecer as bases para essa aprendizagem.*

## **A caminho das “recomendações”**

*Uma questão central na preparação para o ensino da Matemática é o desenvolvimento de uma compreensão profunda dos temas de matemática do currículo escolar e de como se enquadram na disciplina de matemática. Com demasiada frequência, assume-se como verdadeiro que o conhecimento dos professores relativamente ao conteúdo da matemática escolar está assegurado no momento em que concluem o ensino secundário. Os professores devem ter oportunidade de rever os tópicos da matemática escolar de tal maneira que possam desenvolver uma compreensão mais profunda das ideias e relações mais subtis que existem entre os concei-*

Deve ter-se em atenção que as investigações de Deborah Ball, de Liping Ma e de outros se foram desenvolvendo ao longo dos anos 90, ao mesmo tempo que as Normas – publicadas em 1989 – e as Normas Profissionais – publicadas em 1991 – do NCTM, iam sendo discutidas, apoiadas, contestadas, e concretizadas em programas e em textos escolares. As divisões perante as propostas do NCTM foram crescendo no seio das comunidades matemática e da educação matemática e levaram às conhecidas “math wars”. Na parte final dos anos 90, começa a dar-se uma inflexão na situação e os esforços daqueles que, em ambos os campos, desejavam realmente mudar a situação da educação matemática de modo reflectido e inteligente, começam a produzir resultados. Parece-nos útil referir aqui algumas características desta evolução:

a) Pese embora a citação anterior dos *Standards* de 1989, é uma realidade que a componente “conhecimento matemático dos professores” assumia pouca relevância nas propostas do NCTM. Como afirma Wu:

*Nas 200 páginas dos NCTM Teaching Standards, a importância crítica, para um ensino eficaz, do conhecimento matemático dos professores é descrita no seu todo em 8 páginas, pp.132-140.[...]. Se este conhecimento é considerado importante, porque razão todos os episódios (vignettes) dizem respeito a técnicas pedagógicas apenas? [...] até recentemente, a maior parte dos outros documentos e artigos sobre ensino que tenho encontrado não realçam de forma apropriada a necessidade de competência matemática básica [da parte dos professores].<sup>11</sup>*

Claramente, a revisão das Normas, lançada pelo NCTM em 1995, procurou e conseguiu alterar esta situação, sobretudo através do convite, feito a todas as associações participantes no *Conference Board of Mathematical Sciences* (CBMS), para a criação de *Association Review Groups* (ARGs) que dessem pareceres e informação sobre o ensino básico e secundário. Foram criados 14 ARGs, entre os quais um da *American Mathematical Society* e outro da *Mathematical Association of America*. Depois da publicação dos *Principles and Standards*, uma carta enviada ao NCTM pelas associações profissionais (incluindo a AMS e o MAA) revela a mudança resultante dos esforços do NCTM. Referindo-se ao processo de redacção das novas Normas, as associações escrevem:

*Este empreendimento momentoso foi, do ponto de vista das instituições participantes, dramaticamente bem sucedido, com proveito tanto para o NCTM como para aquelas instituições. Foi um processo notável e sem precedentes, que conduziu a algumas das mais reflectidas e bem organizadas discussões sobre o currículo e ensino da matemática que temos presenciado nestas comunidades profissionais. Contrastou com aquilo que foi sentido por alguns como uma inadequada participação dos matemáticos profissionais na construção das normas originais.<sup>12</sup>*

b) Vimos já como a comunidade da educação matemática americana começou, sobretudo a partir dos anos 90, a dedicar a sua atenção ao problema do conhecimento matemático dos professores. As investigações pioneiras de Deborah Ball e o famoso livro de Liping Ma não foram iniciativas isoladas e sem consequências. Para apenas referir a continuidade do trabalho destas duas investigadoras, diga-se que Liping Ma prossegue as suas investigações na *Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching* e que Deborah Ball coordena, juntamente com Hyman Bass, ex-presidente da *American Mathematical Society*, um projecto intitulado *Mathematics Teaching and Learning to Teach*, na *School of Education* da Universidade de Michigan. Na *homepage* de Deborah Ball encontram-se para *download* numerosos artigos e capítulos de livros.

Um dos textos mais interessantes e recentes é o capítulo “Making Mathematics Reasonable in School” do livro *A research companion to principles and standards for school mathematics*, publicado este ano pelo NCTM<sup>13</sup>. Este texto, escrito por D. Ball e Hyman Bass, reflecte bem um novo estilo, por assim dizer, na investigação em educação matemática, no qual processos fundamentais da matemática – raciocínio e demonstração – e implícita ou explicitamente, a necessária preparação matemática do professor, assumem um papel relevante. Transcrevemos o parágrafo final do capítulo:

*Nos episódios que analisámos, tentámos ilustrar não apenas que aspectos pode assumir o raciocínio matemático substantivo de alunos do 3º ano, mas também que estas destrezas e práticas foram aprendidas ao longo do tempo, desde o primeiro dia de aulas em Setembro. Tornámos também explícitos alguns dos processos pedagógicos que contribuíram para essa aprendizagem, as práticas do professor que tiveram um papel importante no facto da matemática se tornar “raciocinável” para os alunos. Mas estas práticas não são do tipo daquelas que os professores passam a realizar simplesmente porque tal lhes é sugerido. Tal como os alunos precisam aprender a raciocinar matematicamente, também os professores devem aprender e desenvolver práticas que apoiem tal tipo de aprendizagem. Se os alunos têm que adquirir capacidades básicas para construir o seu conhecimento matemático por meio do raciocínio, então os professores devem ter oportunidade de desenvolver o conhecimento e a prática necessários para tornar a matemática “raciocinável” na escola.*

c) Os dois pontos anteriores exemplificam, do “lado da educação”, uma evolução positiva da atitude perante a educação matemática. Do “lado da matemática”, o exemplo de evolução positiva que apresentamos é o de H. Wu, do Departamento de Matemática da Universidade da Califórnia, Berkeley.

Como já vimos por um texto de Wu citado atrás, este matemático foi, como muitos outros, um crítico “feroz” das Normas e das Normas Profissionais do NCTM, não só em relação à pouca relevância dada, naqueles documentos, ao conhecimento matemático dos professores, como também à subalternização da demonstração nos mesmos documentos. Até aqui, nada de extraordinário. Mas o que é notável nos escritos de Wu é sentir que, contrariamente ao que é habitual (tiradas as excepções que existem sempre), este matemático acha que as questões da educação são, como a matemática, “raciocináveis”.

O trecho seguinte pode parecer banal, mas vindo de um matemático profissional, que se começou a interessar por questões de educação em 1992, não tem infelizmente nada de vulgar:

*Existem muitas razões para explicar a performance tão fraca de tantos professores de matemática. Uma razão óbvia é que nunca aprenderam correctamente matemática desde o jardim de infância até ao fim da universidade. Isto é um obstáculo à possibilidade de um bom ensino porque não se pode ensinar o que não se sabe. Outra explicação para a sua fraca performance é que a sua abordagem pomposa, dissecada e rígida da matéria afasta logo de início os alunos. Na maior parte dos casos, estes professores nunca viram outro tipo de ensino do que o dos seus professores, na escola e na universidade, igualmente pomposo, dissecado e rígido. Anos e anos de exposição a este mau ensino deixa naturalmente as suas marcas. Em teoria, estes erros no modo de ensinar de cada um seriam eliminados em aulas de pedagogia no departamento de educação, mas esta teoria falha por duas razões. A primeira é que desfazer este problema pedagógico requer um profundo conhecimento matemático do parte dos futuros professores e dos seus formadores, como veremos mais à frente. A segunda é que não se podem eliminar os efeitos perniciosos de anos e anos de observação directa de um mau ensino num semestre ou dois de amáveis discussões sobre as boas maneiras de ensinar. Por isso, um ponto de partida para o desenvolvimento profissional dos futuros professores tem que consistir num melhor ensino em toda a universidade (e certamente nas escolas também).*

Compreende-se a partir daqui como Wu acolhe com entusiasmo o livro de Liping Ma, de que não deixa evidentemente de citar a conclusão principal:

*Tendo reflectido em profundidade sobre o conhecimento da matemática escolar por parte dos professores, sugiro que para melhorar a educação matemática dos alunos, uma acção importante a tomar é melhorar a qualidade do conhecimento da matemática escolar dos seus professores.*

Mas Wu não pára aqui e levanta mesmo a questão da qualificação, como ele diz, dos “professores dos [futuros] professores”. E acrescenta:

*Queremos que eles sejam ao mesmo tempo bons matemáticos e bons professores. Além disso, ainda esperamos que tenham reflectido profundamente sobre o currículo dos ensinamentos básico e secundário e as necessidades especiais dos futuros professores. Não é surpreendente que em muitos Estados o desenvolvimento profissional em matemática não tenha bons resultados, porque não existem suficientes pessoas para fazer esse trabalho com qualidade.*

*Seria concebível convocar uma reunião dos professores encarregados da formação de professores para abrir um diálogo a este respeito? Poderíamos imaginar um curso de verão para estes professores?*

*Alguns considerariam uma tal sugestão, relativa aos nossos colegas universitários, ultrajante. Se dermos um passo atrás, no entanto, e olharmos para o que estamos a discutir aqui – como corrigir a situação no que diz respeito a professores sem as necessárias qualificações – veríamos que estamos a fazer qualquer coisa que os professores olhariam justamente como ultrajante. Tal sendo o caso, porque havemos de nos poupar a nós? Espero que não tenhamos que esperar mais uma década até este tópico ser considerado legítimo e discutido como tal.*

Durante os últimos 7 ou 8 anos, Wu tem feito formação contínua de professores em cursos de verão. A sua reflexão sobre as necessidades de preparação dos futuros professores resulta fundamentalmente dessa experiência. Além de artigos de discussão sobre questões de educação, tem escrito textos de matemática elementar muito interessantes.<sup>14</sup>

### **As recomendações da Conference Board of Mathematical Sciences**

O percurso de aproximação, por assim dizer, de representantes dos dois lados das “math wars” conduziu – num processo que é tradicional nos EUA – à constituição de uma comissão ampla para chegar a algum consenso e publicar, depois de um trabalho efectivo de alguns anos, “recomendações”. Desta vez a comissão foi formada no seio da *Conference Board of Mathematical Sciences* (CBMS).

A CBMS tem a sua origem numa comissão fundada em 1942 pela *American Mathematical Society* e pela *Mathematical Association of America*. Engloba actualmente 16 associações nacionais, entre elas o NCTM. Destina-se a promover a compreensão e a cooperação entre as diversas associações, de modo a trabalharem em conjunto e a se apoiarem nos esforços para desenvolver a investigação, melhorar a educação e expandir as aplicações da matemática.

Em Novembro de 2001 a CBMS organizou uma reunião de dois dias<sup>15</sup> para lançamento de um relatório de 145 páginas, *The Mathematical Education of Teachers (MET)*<sup>16</sup>, que vinha sendo preparado desde há alguns anos, e que diz respeito aos seguintes temas gerais:

- (i) a base intelectual da matemática escolar;

(ii) a natureza específica do conhecimento matemático necessário para o ensino.

Sem menosprezar o valor do conteúdo do documento, que descreveremos brevemente mais à frente, o que é mais notável e exemplar neste documento é a decisão de fazer face à situação da educação matemática nos níveis elementar e secundário – geralmente considerada como má –, atacando *racionalmente* um dos factores geralmente reconhecido como essencial – a educação matemática dos professores –, e tentando levar até tão longe quanto possível o consenso existente. No prefácio salienta-se a contribuição “da investigação em educação matemática” na identificação da importância dos temas que o relatório aborda e são referidas a esse respeito e explicitamente as contribuições de Deborah Ball e de Liping Ma – que, como escreveu Shoenfeld e já citámos, “conquistou a atenção e o favor de ambos os lados das ‘math wars’”.

O relatório *MET* tem 9 capítulos. Além do primeiro (introdução geral) e do sexto (recomendações sobre a tecnologia na preparação matemática dos professores), o relatório inclui

- Um capítulo de recomendações gerais (cap. 2º).
- Três capítulos sobre recomendações específicas para cada nível de escolaridade (nos EUA, ou seja: anos 1-4, cap. 3º; anos 5-8, cap. 4º; anos 9-12, cap. 5º). Essas recomendações dizem respeito ao número mínimo de cursos de matemática em cada nível, bem como sumarizam os temas principais destes cursos. Além disso, desenvolvem considerações sobre o conhecimento matemático básico para o ensino que os futuros professores devem adquirir nesses cursos.
- três capítulos (7º, 8º e 9º) que expandem os respectivos capítulos anteriores e que se destinam especificamente “aos professores do ensino superior que regem cursos sobre os fundamentos da matemática escolar e que pretendem ampliar a sua base de conhecimentos sobre o ensino escolar de matemática” bem como “aos matemáticos em geral, de modo a que fiquem conscientes das questões pedagógicas relativas ao ‘conhecimento matemático para o ensino’.”

Julgamos que tem muito interesse, para aqueles que se interessam pela educação matemática em Portugal, a leitura deste relatório. Por outro lado, na reunião de lançamento do relatório, atrás referida, houve também intervenções significativas do impulso de mudança que o relatório *MET* pode provocar. Os dois pontos seguintes destinam-se a chamar a atenção para o relatório e para essas intervenções.

### **Recomendações gerais**

Estas recomendações gerais são indubitavelmente a parte do *MET* que tem suscitado maior consenso. Segue-se a transcrição dos enunciados de algumas recomendações (excluem-se as que são demasiado específicas do contexto educacional dos EUA) e ainda de partes seleccionadas das mesmas.

Recomendação 1. Os futuros professores necessitam de cursos de matemática em que desenvolvam uma profunda compreensão da matemática que vão ensinar.

[...]

*Os cursos sobre as ideias fundamentais da matemática escolar devem ser regidos por matemáticos com um interesse sincero na formação de professores. Esta formação deve ser coordenada com os departamentos de educação. É vital que os professores do departamento de matemática e do departamento de educação concordem acerca das expectativas concretas relativamente à aprendizagem e resultados nestes cursos. Além disso, devem ser pensados com cuidado os pré-requisitos exigidos para estes cursos. Os cursos especiais para futuros professores, ao contrário dos cursos tradicionais, como intermediate algebra e college algebra, são desejáveis para aqueles a quem faltam os pré-requisitos.*

...

Recomendação 3. Os cursos acerca das ideias fundamentais da matemática escolar devem ter por objectivo central um desenvolvimento completo de ideias matemáticas básicas. Todos os cursos para futuros professores devem desenvolver um raciocínio metódico e um “senso comum” matemático na análise de relações entre conceitos e na resolução de problemas.

*A atenção dada a uma ampla e flexível aplicabilidade das ideias básicas e modos de raciocínio é preferível a uma passagem superficial por muitos tópicos.*

[...]

Recomendação 4. Ao mesmo tempo que constroem o conhecimento matemático, os cursos de matemática para futuros professores devem desenvolver os hábitos de pensamento próprios de um matemático e dar a conhecer estilos de ensino flexíveis e interactivos.

[...]

Recomendação 5. A educação matemática de professores deve ser reconhecida como uma parte importante da missão dos departamentos de matemática em instituições que formem professores. Um maior número de matemáticos deve envolver-se profundamente nas questões da educação matemática nos ensinos básico e secundário.

Recomendação 6. A educação matemática dos professores deve ser vista como um trabalho de parceria entre os professores dos departamentos de matemática e de educação.

[...]

*A realidade, hoje em dia, é que existe uma grande desconfiança entre os professores universitários de matemática e os professores dos departamentos de educação, tanto no interior das instituições como em declarações públicas. Esforços conscientes, de nível local e nacional, são necessários para promover cooperação, ao mesmo tempo que compreensão mútua e respeito entre estes dois grupos. Matemáticos e educadores matemáticos, trabalhando em cooperação, podem ser mais eficazes junto das organizações estaduais e nacionais responsáveis pelas normas curriculares e pela certificação dos programas de formação de professores.*

[...]

Recomendação 8. Deve existir uma maior colaboração entre professores universitários e professores dos ensinos básico e secundário.

*Observar os professores em acção e conhecer as suas práticas pode dar aos matemáticos perspectivas que os ajudem na formação de futuros professores. [...]. Por outro lado, os matemáticos devem ter um papel importante nas actividades de desenvolvimento profissional dos professores.*

[...]

Recomendação 10. Os professores devem ter oportunidade de desenvolver o seu conhecimento matemático e o seu ensino ao longo da sua carreira, por meio de auto-formação e formação nas universidades [e ESE's], e por meio de cursos formais.

[...]

Recomendação 11. A matemática nos *middle grades* (5-8) deve ser ensinada por professores especialistas.

### **"A missão central dos departamentos de matemática"**

William Kirwan, matemático e reitor da Ohio State University, fez uma vigorosa intervenção na reunião de apresentação do relatório MET, dizendo que a preparação de professores não podia ser uma missão periférica dos departamentos de matemática e de educação, mas a "missão central". E descreveu 6 estratégias para atingir este objectivo. Transcrevemos a primeira:

*Em primeiro lugar, temos que reformular e dar uma nova estrutura ao currículo da licenciatura [em matemática], para futuros professores e para os outros estudantes. Devemos colocar maior ênfase na aprendizagem activa em todos os níveis e nas conexões que a matemática tem com as outras disciplinas. A matemática é importante para todos os nossos estudantes e devemos imediatamente alterar o papel do nosso departamento de matemática – deixar de ser um filtro na formação e transformar-se num motor da educação. Devemos premiar aqueles professores da universidade que têm talento para pôr em marcha o interesse pela matemática e a sua compreensão. Em colaboração com as Schools of Education, necessitamos criar percursos no departamento para a preparação de futuros professores dos ensinos básico e secundário e criar percursos conduzindo a doutoramentos em educação matemática. Devem também os nossos professores do departamento de matemática modelar as técnicas pedagógicas que os futuros professores irão usar na sala de aula. Para tornar isto possível, tomámos recentemente, na Ohio State University, a decisão de limitar alguns cursos para futuros professores a não mais do que 20 a 30 alunos.[...]. Formámos também um Conselho Universitário para a Formação de Professores, que inclui professores das escolas públicas [...] e representantes das disciplinas de Artes e Ciências. Este grupo está a melhorar o currículo da formação de professores em matemática, ciências e outras disciplinas [...nomeadamente] a reforçar e dar nova estrutura ao programa para professores do ensino médio [2º e 3º ciclo da educação básica].<sup>17</sup>*

### **Propostas de concretização**

Naturalmente, as propostas de concretização das recomendações do MET (e obviamente, as próprias recomendações) que têm sido propostas nos EUA dizem respeito ao contexto americano da educação matemática. Devemos interrogar-nos se, *também em Portugal*, a preparação matemática dos professores na sua formação inicial é de má qualidade e tem *por essa razão* reflexos negativos – juntamente com outros factores, como é óbvio – na educação matemática dos ensinos básico e secundário. Se a resposta for positiva, como julgo, competirá aos responsáveis pela qualidade da educação matemática, a diversos títulos e em diversos graus, tudo fazer para que essa preparação melhore: analisando a situação em pormenor, encontrando o que precisa de ser mudado e dando passos concretos ou fazendo propostas quando as medidas a tomar estão fora do seu alcance.

Poderá no entanto ter interesse apresentar aqui algumas propostas que já foram feitas, a título de exemplo. Ver-se-há assim melhor no que podem vir a dar as recomendações (nos EUA), embora vá haver, certamente, interpretações diferentes.

#### **"Introdução à álgebra" por Hung-Hsi Wu**

Num artigo de 1997, e com a clareza habitual, Wu apresenta uma experiência por si realizada na Universidade da Califórnia em Berkeley<sup>18</sup>. Wu começa por explicar que os cursos dos últimos anos da licenciatura em matemática são em geral pensados para estudantes que seguirão depois cursos de pós-graduação, ou seja para futuros matemáticos profissionais. Por essa razão, esses cursos são encarados "como os primeiros passos de uma jornada de mil milhas" e pretendem dar a estes estudantes uma "base firme para futura investigação", sendo portanto completamente preenchidos com "procedimentos técnicos" (de matemática avançada, acrescentamos nós). A ideia é que mesmo que não compreendam

algumas das coisas que lhes são ensinadas, isso irá acontecer na pós-graduação ou mesmo mais tarde, durante as suas investigações. Portanto, por assim dizer, o prazer da compreensão não será muitas vezes imediato, fica adiado mas acontecerá no futuro... O problema é que, em média, apenas 20 % seguirão para a pós-graduação, e dos 80 % que não o fazem, para os quais estes cursos são os últimos, muitos estão a preparar-se para ser futuros professores do secundário. Como diz Wu, "gostaríamos que eles compreendessem melhor o que aprenderam mal na escola [... e que] soubessem o que é a matemática e como a matemática é feita. Mas, pelo menos para estes, [...], falhamos completamente". Por isso "a educação universitária destes estudantes é longa em tecnicismos mas curta na informação essencial mínima que lhes permitiria compreender mesmo os factos elementares de um ponto de vista avançado". Wu conta que antes de iniciar um curso de introdução à álgebra a estudantes do tal grupo de 80% que não iriam fazer pós-graduação, perguntou se alguém sabia porque razão  $1/(1/5) = 5$  e ninguém foi capaz de responder. E acrescenta que normalmente, num curso de introdução à álgebra, relativamente aos números racionais, a sequência do que é ensinado é a seguinte:

- introduz-se a noção de domínio de integridade  $D$ ;
- constrói-se o conjunto quociente das classes de equivalência dos pares ordenados  $(p,q)$  de elementos de  $D$ , mostra-se que a adição e a multiplicação dessas classes de equivalência é bem definida e que formam um corpo  $F$ ;
- define-se o homomorfismo injectivo canónico de  $D$  em  $F$  e identifica-se  $F$  com a sua imagem;
- mostra-se então que todos os elementos não nulos de  $D$  têm inverso (multiplicativo) em  $F$ ;
- e que se  $D$  é o corpo dos inteiros,  $F$  é o corpo dos racionais.

Escreve Wu que pode ser ou não que o professor se lembre de fazer notar que  $1(1/b)=b$ . Mas esperar que um estudante médio, depois de ficar mergulhado por esta avalanche de novos termos, "fique a conhecer os números racionais a partir do conceito de corpo quociente", é uma esperança sem sentido.

A proposta de Wu é que novos cursos, não de nível inferior mas qualitativamente diferentes, sejam organizados para futuros professores. Esses cursos devem obedecer, entre outras, às seguintes condições:

- fazer conexões explícitas entre os temas do curso e os tópicos da matemática elementar;
- colocar os temas no seu contexto histórico;
- situar os temas em contextos matemáticos amplos.

Esta última condição é muito importante, pois pretende que os futuros professores adquiram uma cultura matemática ampla. Isso não pode ser feito, claramente, se todos os assuntos são tratados com todos os detalhes técnicos (demonstrações de todas as afirmações, exposições completas do ponto de vista técnico). Por isso, num curso para futuros professores, os matemáticos devem abdicar dessa visão "perfeccionista" do ensino da matemática, e fazer "incursões culturais" (o termo é nosso) nessa matemática ampla que está relacionada com o tema concreto que está a ser ensinado. Como exemplo, Wu refere um curso "normal" sobre funções de variável complexa e diz que no fim desse curso os estudantes estão aptos a perceber "a relevância e o significado do teorema da função de Riemann, do problema de Dirichlet e da Hipótese de Riemann", e das ideias subjacentes, que influenciaram a matemática nos últimos 150 anos, o que seria importante para a cultura matemática dos professores do ensino secundário. Mas isso não é feito *porque não pode ser feito* com todos os detalhes técnicos!

No seu curso experimental de álgebra para futuros professores, Wu procurou obedecer as condições anteriores. Decidiu usar como um dos dois temas principais do curso as demonstrações (séc. XIX) de impossibilidade de resolução com régua não graduada e compasso dos três problemas clássicos (duplicação do cubo, quadratura do círculo e trissecção do ângulo). Não só se trata de um tema matemático muito interessante por si próprio e pelas suas origens e desenvolvimento histórico, como o seu tratamento envolve alguns tópicos de álgebra com conexões directas com a matemática elementar que os futuros professores vão ensinar.

Alguns dos tópicos de álgebra abordados foram: números construtíveis, revisão de  $Z$  e  $R$ , algoritmo de Euclides e factorização em números primos, congruências mod  $n$ , polinómios sobre um corpo, irreducibilidade e factorização única de polinómios, raízes da unidade e polinómios ciclotómicos, extensões de corpo e seus graus, impossibilidade dos três problemas clássicos, construtibilidade de polígonos regulares.

O outro tema disse respeito aos teoremas de Abel e Galois relativos à impossibilidade de extracção de raízes de certos polinómios de grau  $\geq 5$  por meio de radicais.

### **"Introdução à Teoria dos Números e Álgebra Moderna" (ITNAM) e "Tópicos em Geometria" (TG) na Universidade do Arizona<sup>19</sup>**

Estes dois cursos substituem, na preparação matemática de futuros professores, os cursos de álgebra abstracta e de análise. Alguns tópicos incluídos:

**ITNAM.** Dos números naturais aos números reais: teoria dos números decimais, pontos de coordenadas racionais em curvas algébricas, representações diversas dos números reais. Exemplos de projectos: números de Fibonacci, fracções contínuas. Livro adoptado: Fred Stevenson, *Exploring the Real Numbers*.

**TG.** Medida, poliedros, investigações envolvendo geodésicas em várias superfícies, caleidoscópios, simetria e problemas isoperimétricos. Livro adoptado: David Gay. *Geometry by Discovery*.

### ***Journey into Mathematics: An introduction to Proofs***<sup>20</sup>

Com este título (também o título de um livro do mesmo autor), Joseph Rotman rege um curso na Universidade de Illinois destinado a fornecer a futuros professores uma ideia do que é e como se faz a matemática. Os estudantes lêem, criticam, exploram e escrevem demonstrações sobre tópicos como: indução, área, teorema de Pitágoras, triplos pitagóricos e método de Diofanto, trigonometria, integração, aproximações (área e perímetro do círculo), sucessões, números complexos, polinómios, irracionalidade de  $\pi$ .

### ***Propostas de Al Cuoco***

Num artigo publicado em 2001, Al Cuoco faz diversas propostas e descreve experiências de cursos para futuros professores realizadas em diversas universidades americanas<sup>21</sup>.

Uma das ideias propostas designa-se por "seminários sombra". Suponha-se que estudantes de matemática da licenciatura em ensino estavam a frequentar uma cadeira "normal" (por exemplo, introdução à álgebra ou álgebra linear). Um grupo de professores – um matemático, um professor do ensino secundário e um professor do departamento de educação – organizavam todas as semanas uma sessão de seminário, uma espécie de "curso sombra" em que os futuros professores explorariam do ponto de vista do ensino secundário os tópicos do curso e fariam conexões com tópicos de álgebra ou geometria elementar. Uma experiência nesta direcção está a decorrer na Universidade de Boston, em que matemáticos e professores da *School of Education* construíram um "companion course" para futuros professores no sentido de conectar a matemática dos seus cursos de álgebra abstracta, álgebra linear e teoria dos números com o currículo do secundário.

O artigo que estamos a referir, e que foi também publicado no *Bolletino* da União Matemática Italiana, contém muitas outras propostas interessantes conducentes a

- incluir na preparação matemática dos futuros professores experiência de investigação matemática;
- diversificar os modelos de ensino nas universidades;
- inserir os tópicos da matemática escolar em contextos mais amplos.

### **Regresso às origens...: Klein e Lebesgue.**

As ideias sobre educação são com frequência recorrentes. Por vezes parece mesmo que a experiência e a reflexão sobre educação de Montessori e de Dewey, por exemplo, já os tinham levado a "descobrir" quase tudo o que a investigação em educação "redescobre" agora. Analogamente, se lermos ou lermos com atenção os numerosos e riquíssimos textos que Felix Klein e Henri Lebesgue escreveram sobre a preparação dos futuros professores de matemática, teremos a surpresa de encontrar dois matemáticos de indiscutível valor que não desdenharam usar a sua experiência e inteligência na abordagem de questões de pedagogia da matemática, e concluiremos que a sua reflexão e consequentes propostas antecipam, em muitos pontos, o que parece estar agora a ser descoberto...

### **Felix Klein. *Elementary mathematics from an advanced standpoint***

Felix Klein (1849-1925) doutorou-se em matemática aos 19 anos e quatro anos depois apresentou, na abertura do ano académico da Universidade de Erlangen, um texto curto, "Considerações comparativas sobre as investigações modernas em geometria", que viria a ficar conhecido por "programa de Erlangen". Na opinião do autor este texto, que "não desenvolve nenhum pensamento realmente novo" tinha apenas por objectivo estabelecer uma ligação entre as "disciplinas geométricas", pois a "geometria, sendo embora uma em essência, dividiu-se demasiadamente, por causa do seu rápido desenvolvimento nos últimos tempos." Um século depois, Dieudonné escreveu que "o programa de Erlangen é justamente considerado com um dos momentos mais importantes da história da matemática no séc. XIX" explicando que é, ao mesmo tempo "o resultado final da longa e brilhante evolução da geometria projectiva, que resume, condensa e 'explica', ao dar o devido valor ao papel fundamental da teoria dos grupos" e "inaugura o domínio que a teoria dos grupos vai gradualmente exercer sobre toda a matemática". Estas observações chegam para dar uma ideia do valor de Klein como matemático. As ideias de Klein sobre educação e preparação de professores podem ser apreciadas sobretudo na sua famosa obra em três volumes *Elementary mathematics from an advanced standpoint*.

Para quem se interessa pela educação matemática e pela preparação dos estudantes candidatos ao

professorado, é importante saber que Felix Klein, na mesma linha de pensamento que o levou como cientista a escrever o programa de Erlangen, dedicou grande parte da sua energia, como professor famoso na Universidade de Gottingen, a fazer com que os seus alunos, em particular os futuros professores do ensino secundário, percebessem “a matemática, não como um conjunto de temas isolados, mas como um organismo vivo”. Referem ainda os tradutores para inglês daquela obra:

*Interessava-se profundamente pelo ensino de matemática nas escolas secundárias, tanto no que diz respeito aos conteúdos a ensinar, como no melhor modo de o fazer. [...] Procurou reduzir a distância entre as escolas e a universidade, para tirar as escolas da letargia da tradição [...] e transformar a atitude e o tipo de ensino universitário”.*

Durante muitos anos Klein fez ciclos de lições, em Gottingen, destinadas a professores e futuros professores do ensino secundário. Dessas lições ficaram-nos alguns livros, que foram traduzidos para inglês e sucessivamente editados e esgotados. São particularmente importantes os volumes I (Aritmética, Álgebra e Análise) e II (Geometria) do livro já referido.

Na transcrição que vamos fazer de parte do primeiro parágrafo da Introdução deste livro, em que Klein descreve a prática (que ele e outros estão a combater) do ensino universitário dos futuros professores, é extraordinário como *parece ter feito as investigações* de Deborah Ball e de Liping Ma, e *estar a redigir* a introdução das recomendações do CBMS.

*[...] os universitários estavam preocupados exclusivamente com a sua ciência, sem pensar sequer um momento nas necessidades das escolas, sem mesmo se preocuparem em estabelecer ligações com a matemática escolar. Qual era o resultado desta prática? O jovem estudante universitário sentia-se, logo de início, confrontado com problemas que não tinham qualquer relação, por pequena que fosse, com os temas que tinha tratado na escola. Naturalmente, esquecia estes rápida e completamente. Quando, depois de ter acabado o curso, se tornava um professor, percebia que se esperava que ele ensinasse a matemática tradicional à antiga maneira; e, como era incapaz, sem ajuda, de descobrir qualquer ligação entre esta tarefa e a sua matemática universitária, racia rapidamente no modo habitual de ensinar, e dos seus estudos universitários restava apenas uma mais ou menos agradável memória, que não tinha qualquer influência no seu ensino.*

Klein, que escrevia isto em 1908, continua:

*Existe agora um movimento para abolir esta dupla descontinuidade, a qual é prejudicial para a escola e para a universidade. Por um lado, desenvolve-se um esforço para impregnar a matéria ensinada pelas escolas secundárias com novas ideias originadas nos avanços modernos da ciência e de acordo com a cultura moderna.[...] Por outro lado, faz-se uma tentativa para ter em conta, na formação universitária, as necessidades dos professores da escola secundária. É precisamente nestas conferências de carácter abrangente, que estou a iniciar agora, que vejo uma das maneiras de ajudar nessa direcção. O meu objectivo será sempre de mostrar-vos as conexões mútuas entre os problemas dos vários domínios [álgebra, teoria dos números, teoria das funções, geometria,...], coisa que não é feita suficientemente nas aulas habituais, e em especial salientar as relações entre estes problemas e os da matemática escolar. Deste modo espero tornar fácil para vós adquirir aquela capacidade que considero como o verdadeiro objectivo dos vossos estudos académicos: a capacidade de retirar (em larga medida), do amplo corpo de conhecimentos que a universidade coloca diante de vós, um estímulo vivo para o vosso ensino.*

Ainda nesta esplêndida introdução ao seu livro sobre *Elementary Mathematics*, Klein tem mesmo coragem para abordar questões especificamente de carácter pedagógico e educacional. Referindo-se ao facto dos números, no caso das crianças, terem sempre que ser introduzidos de modo concreto e não abstracto – “nozes, maçãs e outras coisas boas” –, acrescenta:

*[...] devemos – mutatis mutandis – levar a sério que em qualquer formação, mesmo universitária, a matemática deve estar associada com aquilo que é realmente interessante para o aluno num determinado estado de desenvolvimento e que pode ser posto em relação com a matemática. [...] É exactamente este valor psicológico que tentarei salientar nas minhas conferências.*

No que diz respeito ao conteúdo da matemática escolar e das suas conferências, Klein afirma que, em oposição aos conservadores, “eu sou progressista”. Em particular, que colocará sempre o conceito de função no centro da formação, porque “de todos os conceitos matemáticos dos últimos dois séculos, este desempenha o papel dianteiro sempre que o pensamento matemático é utilizado”, Além disso, “uma consideração prioritária será, acima de tudo, o desenvolvimento vigoroso da percepção espacial”.

Evidentemente, este é um livro para os professores de matemática e os investigadores em educação matemática lerem e não para *ouvirem falar de...* Por isso, para *despertar o apetite* e tornar mais *visíveis*, por assim dizer, as intenções e métodos de Klein na preparação matemática dos futuros professores, vou apenas referir uma passagem relativa aos números irracionais.

No capítulo da Aritmética e Teoria dos Números, Klein discute possíveis e diferentes tendências na abordagem dos números (inteiros, racionais, irracionais) ao longo da escolaridade básica (diríamos nós) e secundária. Como sempre, um enorme relevo dado à origem histórica dos conceitos, uma clara aposta na recusa da formalização apressada, no uso da intuição e na *utilização de elementos gráficos e figuras*. A certa altura, propõe a seguinte representação gráfica.

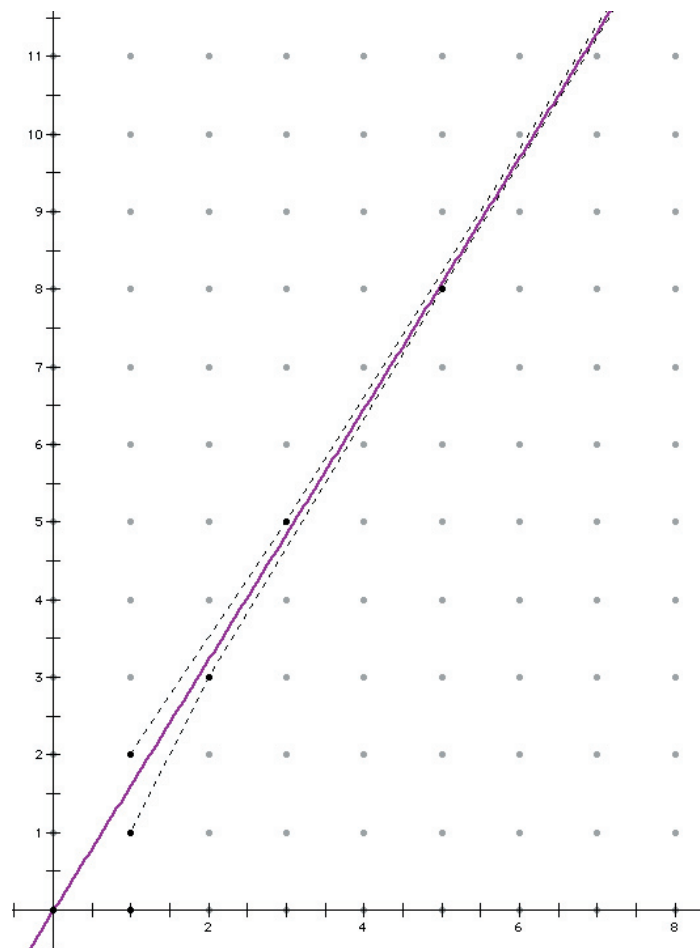


Figura 1

Consideram-se apenas os números reais positivos e marcamos no quadrante positivo  $Oxy$  os pontos de coordenadas inteiras. Obtemos um quadrante pontado como o da figura 1. Se imaginarmos as semi-rectas passando pela origem, apenas as de declive racional passam por pontos de coordenadas inteiras, as de declive irracional conseguem "fintar" todos esses pontos. Klein salienta este facto, dizendo que "é muito notável". Considera em particular a semirecta (a cheio na figura) cujo declive é o número de ouro

$$z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Acrescenta, referindo-se á construção de Dedekind dos números irracionais, que aquela semirecta faz um *corte* nos números racionais (os declives racionais) deixando uns para a direita e outros para a esquerda. Considera então a fracção contínua correspondente ao número de ouro,

$$z = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

e os seus convergentes (calculados e escritos já como *declives*)

$$1 = \frac{1}{1} \quad 1 + \frac{1}{1} = 2 = \frac{2}{1} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3} \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5} \quad \dots$$

Se marcarmos esses declives (como pontos de coordenadas inteiras: (1,1), (1,2), (2,3), (3,5), (5,8),...) e os unirmos de dois em dois (a partir do primeiro e depois do segundo) por meio de segmentos a tracejado, obtemos duas linhas poligonais que se aproximam cada vez mais da semirecta, uma pelo lado esquerdo, outra pelo lado direito, sem nunca a tocarem.<sup>22</sup>

Esta é uma magnífica representação que liga a construção dos irracionais pelos cortes de Dedekind à representação dos números irracionais por meio de fracções contínuas. Apenas um entre muitos exemplos que podemos encontrar neste livro. E que nos pode deixar perceber o que significava, para Klein, a matemática elementar numa perspectiva avançada, ou, por outras palavras, conteúdos matemáticos e métodos de ensino apropriados à preparação dos futuros professores.

### **Henri Lebesgue: Les coniques. La mesure des grandeurs.**

Henri Lebesgue (1875-1941) doutorou-se aos 27 anos com uma dissertação – em que introduzia o seu célebre integral – denominada *Intégrale, longueur, aire*. Tal como Felix Klein, foi sempre reconhecido tanto como eminente matemático como famoso professor e formador de professores, actividade que claramente o fascinava. Ensinou na *École Normale Supérieure* de Sèvres (para raparigas) e ficaram célebres as suas conferências no *Collège de France*. Em 1974, no centenário do seu nascimento, a Librairie Albert Blanchard publicou um livro muito interessante, intitulado *Message d'un Mathématicien: Henri Lebesgue*, contendo extractos dos seus livros e artigos e ainda a redacção dos seus cursos de matemática elementar em Sèvres, para futuros professores, a cargo de uma sua assistente em Sèvres, Lucienne Félix<sup>23</sup>.

O texto seguinte mostra imediatamente o essencial das preocupações de Lebesgue relativamente à preparação matemática dos professores. É extraído de uma crítica aos concursos de recrutamento de professores (a então chamada *aggrégation*).

*Vê-se o que eu desejaria: que os professores fossem preparados nos seus cursos a dominar completamente o que ensinam... Em resumo, peço que os programas dos concursos obriguem os futuros professores de matemática elementar a estudar a matemática elementar. Pedido natural, demasiado natural... É preciso no entanto fazê-lo, porque actualmente os candidatos são apenas obrigados a estudar, para as suas provas orais, como ensinar a matemática elementar nas turmas do ensino secundário... E isso é completamente diferente [...]*

*É necessário, no ensino secundário, limitar-se ao indispensável, mas será ser muito exigente pedir que os professores vão um pouco mais longe, saibam ao menos o essencial?*

*Deveríamos perguntar a nós próprios quais são os prolongamentos naturais da matemática elementar [...] em que medida são um prolongamento directo, imediato das questões elementares; quais são os capítulos que eles permitem dominar melhor [...]*

*O estudo de uma pequeníssima parte da análise da licenciatura é suficiente [...]. Não quero dizer que o estudo da Análise seja inútil, de modo nenhum; mas, se ele serve precisamente para a formação do espírito dos professores, não lhes serve muitas vezes de ajuda imediata. Pode dizer-se, por exemplo, que a ajuda dada por toda a análise ao ensino [de tais e tais teoremas do secundário] é tão indirecta como a ajuda dada pelo estudo da penetração dos Turcos na Europa a um professor que vai ensinar a Revolução Francesa.<sup>24</sup>*

Lebesgue, no mesmo texto, avança com algumas sugestões gerais de conteúdos para os cursos de matemática universitários dos futuros professores:

*Seria necessário que os candidatos estudassem [a matemática] que responde às questões que o programa dos liceus coloca e deixa em suspenso, ou que estabelece as conexões mais directas entre partes aparentemente muito distantes do programa. Estas matérias novas, que são aquelas de que quero falar, são extraídas algumas daquilo a que se chama a geometria pura, outras da geometria superior, outras da teoria dos números ou da álgebra superior e também de partes da análise que não estão incluídas na licenciatura; existem mesmo algumas que são de tal modo ligadas à matemática elementar que não foram integradas em nenhum outro ramo catalogado da matemática. Todas, em qualquer caso, deveriam ser estudadas como prolongamentos e esclarecimentos da matemática elementar e não como degraus para subir ainda mais alto em geometria pura, em geometria superior, em teoria dos números, etc.<sup>25</sup>*

### **Alguns exemplos do estilo e das ideias de Lebesgue**

#### *Les coniques*

Este é o primeiro livro editado depois da sua morte, e que não sofreu, talvez felizmente, uma revisão final. Podemos apreciar, no primeiro capítulo – Ensino elementar – Lebesgue a trabalhar um assunto destinado aos seus cursos de preparação de professores do ensino secundário.

Logo na parte inicial, e usando uma ironia que tantas vezes perpassa nos seus textos, Lebesgue critica as definições habituais das secções cónicas, pelo seu carácter arbitrário, “disparate”, como ele diz:

*[...] seria necessário a um aluno um espírito assaz perspicaz para adivinhar porque se empreende o estudo, em vez de outros, do lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos tem um valor dado; e porque razão, por exemplo, depois de se ter estudado o lugar geométrico análogo relativo à diferença, não se passa ao produto das distâncias, mas ao lugar dos pontos equidistantes de um ponto e de uma recta.<sup>26</sup>*

Depois desta crítica mordaz, o que se esperaria era que Lebesgue passasse a expor uma teoria alternativa, e que a indicasse aos futuros professores como desejável. Mas não:

*Neste artigo, evitei apresentar um modo de exposição [das cónicas] oposto à exposição clássica, pois estou convencido que, por mais perfeito que seja um método, torna-se na realidade mau se se cristalizar; o único*

*modo de ensinar de um professor é pensar diante dos seus alunos; as grandes orientações de um curso devem estar decididas antecipadamente mas é necessário, creio eu, que os pormenores sejam improvisados.*<sup>27</sup>

O modo como Lebesgue trata esta questão do ensino das cónicas é exemplar e pode servir muito bem para quem queira aprofundar outro tema numa perspectiva semelhante:

- a) Critica a exposição tradicional, do ponto de vista científico e pedagógico.
- b) Adoptando sempre uma perspectiva histórica, descreve as duas teorias das cónicas que existiam (na sua época: analítica e geométrica) e a sua origem (refere evidentemente os gregos, depois Descartes, Desargues e muito mais tarde Monge, Carnot, Brianchon Servois e Poncelet, Cauchy, Dandelin.
- c) Seguidamente faz um resumo crítico da história do ensino secundário das cónicas desde o início do século XIX.
- d) Neste ponto Lebesgue passa a apresentar três abordagens possíveis das cónicas, duas em geometria plana e uma em geometria no espaço (definidas como secções planas de um cone – Apolónio – e utilizando depois as esferas de Dandelin). Embora claramente seja esta a preferida de Lebesgue, tem o cuidado de dizer que é a menos habitual, pelo facto de utilizar a geometria no espaço e ainda (não resiste a dizê-lo...)

*porque é necessário observar, constatar em vez de deduzir; a figura encarrega-se das deduções, tal como as equações o fazem em geometria analítica.*

No entanto, Lebesgue insiste que “o fim imediato deste artigo seria atingido se, depois de duas ou três das suas demonstrações, fosse considerado muito maçador [e o leitor] se pusesse a construir por si mesmo uma exposição da teoria [e se, desta maneira] o ensino se tornasse menos uniforme e por isso mesmo mais vivo”.

#### *La mesure des grandeurs*

Este é porventura o mais importante livro de Lebesgue dirigido aos problemas do ensino. Trata-se de uma série de artigos, publicados na revista *L'Enseignement Mathématique*, sobre um assunto considerado pelo próprio Lebesgue como “o mais fundamental”:

*A medida das grandezas é o ponto de partida de todas as aplicações da matemática, e como as matemáticas aplicadas precederam evidentemente as matemáticas puras e a lógica matemática, pensa-se correntemente que a medida das áreas e dos volumes está na origem da Geometria; por outro lado, a medida [do comprimento] dá origem ao número, quer dizer ao próprio objecto da Análise. Por isso fala-se da medida das grandezas nos três níveis de ensino: primário, secundário e superior; a ligação entre o que é feito nos três níveis de ensino dá-nos um exemplo dos esforços de compreensão e de coordenação que me parecem poder servir mais eficazmente à formação dos futuros professores que o trabalho que se lhes exige: a repetição verbal de lições isoladas [Lebesgue refere-se aqui aos concursos habituais para professores que existiam na sua época].*<sup>28</sup>

Os dois primeiros capítulos são dedicados aos números (inteiros e “passagem do número inteiro ao número mais geral”). O terceiro e quarto capítulos tratam respectivamente das áreas planas e dos volumes. Em seguida são tratados os comprimentos de curvas e as áreas de superfícies (não planas), as grandezas mensuráveis, e a integração e derivação, em outros tantos capítulos. Um magnífico capítulo de conclusões (“Ciência e filosofia. O papel do professor de matemática. O espírito de crítica lógica e pedagógica.”) termina o livro.

Os quatro primeiros capítulos, que dizem respeito aos ensinamentos básico e secundário, contêm numerosas notas pedagógicas. A este respeito, Lebesgue refere na introdução os contactos que tem tido com estes níveis de ensino, e em particular o seu trabalho de preparação de futuros professores desde há muitos anos, acrescentando:

*[...] não será de admirar que me tenha surgido a ideia de escrever artigos de natureza pedagógica; se posso sequer empregar esta palavra que basta em geral para pôr em fuga os matemáticos.*

Como é seu hábito, apresenta nos capítulos referentes aos ensinamentos básico e secundário as vantagens ou objecções de carácter matemático e pedagógico que podem ser levantadas perante as diversas exposições possíveis. No entanto, no que diz respeito à extensão da noção de número (dos inteiros aos irracionais) Lebesgue adopta e defende claramente um tipo de exposição baseado na notação decimal: passa “do número inteiro ao número mais geral” por meio da sucessão – por vezes infinita – de operações necessárias à medição do comprimento de um segmento qualquer. Afirma Lebesgue que (por não ser a notação decimal uma herança dos gregos):

*O nosso ensino ainda não utiliza plenamente este facto histórico, talvez o mais importante da história da ciência: a invenção da numeração decimal.*

É a este propósito que Lebesgue faz uma das suas propostas mais radicais: a eliminação quase completa do estudo das fracções, pois “a fracção  $a/b$  seria simplesmente o quociente exacto de  $a$  por  $b$  e as operações sobre fracções [adição, quociente, ...] não seriam mais que casos particulares de operações sobre números” em notação decimal. Convém ler no original a argumentação de Lebesgue em de-

fesa desta proposta certamente discutível. Transcrevemos apenas um parágrafo que resume a proposta de Lebesgue e depois uma sua observação a propósito das controvérsias que as suas consequências certamente levantarão:

*[...] porque é confrontando francamente as nossas mentalidades que descobriremos os melhores meios de nos compreender e portanto de ensinar.*

Quanto aos capítulos sobre áreas planas e volumes, poderiam muito bem servir de base para um curso de formação de professores sobre aquelas noções, ao mesmo tempo tão importantes e tão ignoradas nos nossos ensino básico e secundário.

## **Reflexões pessoais**

Na primeira parte deste texto, que termina aqui, procurei ser objectivo na descrição do debate sobre a educação matemática dos professores e da sua evolução recente nos EUA. Tentei ainda referir com fidelidade o pensamento de dois matemáticos, de mérito indiscutível, sobre a formação em matemática dos futuros professores, assunto sobre o qual reflectiram profundamente. O que se segue tem um carácter inteiramente diferente. Não tendo feito nenhuma investigação sistemática sobre este tema, e não existindo por outro lado nenhuma investigação directa ou indirecta sobre a situação portuguesa, mas pensando que tal situação interessa directamente os participantes neste encontro, só me resta uma solução: basear-me na minha experiência em formação de professores e no intenso contacto que tenho tido nos últimos 17 anos com professores de matemática de todos os níveis de ensino, para tecer algumas considerações sobre aquela situação e deixar também algumas “teses” pessoais como pontos de partida para uma discussão urgente entre nós.

### ***Algumas notas sobre a situação actual***

A formação matemática dos futuros professores é feita nas Escolas Superiores de Educação (1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> ciclos do ensino básico) e nos Departamentos de Matemática das Faculdades de Ciências das universidades públicas (3<sup>o</sup> ciclo do ensino básico e ensino secundário), existindo no ensino privado instituições correspondentes. Eu seria capaz de arriscar, sem grande medo de errar, que qualquer investigação semelhante às que descrevi acima chegaria à conclusão de que que é

claramente insuficiente e desajustada a preparação matemática dos futuros professores em todos os graus de ensino. Naturalmente que há diferenças, por vezes consideráveis, entre a formação — em termos de nomes e número de cadeiras exigidas — proporcionada pelas diferentes instituições. No caso das ESE's podem encontrar-se grandes variações, sendo impossível, ou pelo menos muito difícil, identificar um esquema comum relativo à formação matemática. Na universidades, essas diferenças consistem sobretudo na inclusão de algumas cadeiras específicas em alguns cursos de formação de professores; exemplos: História da Matemática, Computadores no Ensino da Matemática, cadeiras complementares (formação directamente ligada à prática lectiva futura).

No que diz respeito às causas da formação matemática muito insuficiente dos futuros professores, elas não se afastam das que foram referidas nos estudos e autores citados na primeira parte deste texto. As considerações a fazer em relação aos cursos universitários e aos das ESE's são distintas.

No caso da preparação em matemática dos professores do 3<sup>o</sup> ciclo e do secundário, a ideia básica é a de que as mesmas cadeiras de matemática que servem para os futuros engenheiros, informáticos matemáticos profissionais servem também para os futuros professores. Esta ideia, que o matemático Hang-Hsi Wu demonstra ser completamente errada nos textos que transcrevemos acima, é perfilhada entre nós por grande parte dos matemáticos que formam professores de matemática e mesmo por aqueles que lideram alterações nas respectivas licenciaturas. Questionado a este propósito, um professor da Universidade de Coimbra disse que, numa remodelação em curso, mantinham cadeiras comuns para os futuros professores e outros alunos mas tinham alterado os conteúdos (mais intuitivos, mais ligados às aplicações, ...). Isto significa uma profunda incompreensão da especificidade da preparação matemática do professor, que se julga apenas que essa matemática tem que ser mais acessível, portanto diminui-se a exigência no tronco comum... Dois professores da Universidade de Lisboa responderam, à mesma questão, que não viam razões para distinguir as cadeiras de índole geral.

Note-se que as recomendações da CBMS são o resultado de um compromisso entre posições de partida muito diversas (as profundas divergências das “math wars”). São um documento importante, mas salientamos de novo que se trata de um compromisso... Por exemplo, o relatório propõe duas soluções na reforma das licenciaturas em matemática para professores: ou a criação de cadeiras de matemática específicas para futuros professores, ou a manutenção de um tronco comum mas a criação de uma cadeira *capstone* para compensar as insuficiências dessa solução de tronco comum. Nessa cadeira final seriam retomados os temas principais da licenciatura nos aspectos mais ligados à matemática escolar

que os futuros professores vão ensinar. Esta solução é claramente uma solução de compromisso para as faculdades que não queiram ou não possam (por questões materiais) enveredar pela primeira solução, claramente a desejável. Vemos que em Portugal, pelo menos em dois casos, o máximo que neste momento poderia ser obtido, a vir a ser produzido um relatório semelhante ao do CBMS, seria a solução do curso *capstone*.

Na preparação matemática dos professores dos dois primeiros ciclos do ensino básico, a cargo das ESE's, a situação deve merecer a nossa atenção de modo especial, dado a responsabilidade directa que têm, nessa preparação, membros da comunidade da educação matemática, a que pertencem os participantes deste encontro.

A causa principal, a meu ver, da má preparação matemática dos professores saídos das ESE's é a convicção de que a matemática que esses professores vão ensinar é coisa fácil ... "quem não sabe fazer contas?"... "quem não sabe o que é um quadrado?"... E mesmo se não se lembra imediatamente quais as espécies de triângulos "quanto aos ângulos", rapidamente aprenderá no manual... Matemática portanto já sabem... o que não sabem é tudo o resto (por exemplo, desenvolvimento curricular, investigação em educação, ...)

Só umas "premissas" e um "raciocínio" deste tipo podem justificar que o currículo de uma ESE, relativo à formação de professores do 1º ciclo, possa em quatro anos incluir o seguinte elenco de cadeiras:

- Teorias do desenvolvimento pessoal e social (anual), Biologia do Desenvolvimento (semestral), Psicologia do Desenvolvimento e Aprendizagem (anual), Análise Social da Educação (anual), Teoria e Desenvolvimento Curricular (anual), Investigação em Educação (anual), Fundamentos da Educação (semestral), Didáctica Geral (semestral), Organização e gestão escolar (semestral);

ao mesmo tempo que, no que diz respeito à matemática, inclui apenas:

- Elementos de Matemática (anual), Didáctica da Matemática (semestral)

Como disse, existem muitas diferenças entre as ESE's. Numa outra ESE (prof. do 2º ciclo, variante Mat. e CN), as cadeiras de matemática não faltam, mas a preparação final até pode ser pior do que na anterior:

- Cálculo Infinitesimal I e II (2 semestres), Probabilidades e Estatística I e II (2 semestres), Álgebra linear e geometria analítica I e II (2 semestres) (na mesma linha de pensamento, o curso inclui também Química do Carbono, Termodinâmica Geral e Sistemática Animal e Vegetal...)

Claramente, a razão é aqui a mesma: como fazer contas já sabem, porque não um ano de Álgebra Linear e Geometria Analítica...

Mas o problema da preparação matemática dos futuros professores, nas ESE's, não é apenas, nem sobretudo, a falta de cadeiras de matemática. O que se passa é que, muitas vezes, mesmo quando existem cadeiras com nomes de temas da matemática, o modo como são dadas não acrescenta ou acrescenta muito pouco aos conhecimentos matemáticos que os alunos trazem da sua aprendizagem anterior, frequentemente quase nulos. Parece por vezes considerar-se que a aprendizagem da matemática se pode limitar à resolução de actividades e ao seu comentário. Muitas aulas de matemática tendem a reduzir-se à didáctica: por exemplo, "discussão do tipo de actividades que favorecem nas crianças o desenvolvimento do sentido do número". É certo que nos casos positivos se reconhece que os alunos das ESE's, futuros professores, "não têm o sentido do número", mas na prática tudo se passa como se bastasse serem sujeitos ao tal tipo de actividades, para que o adquirem e fiquem aptos a ajudar os seus alunos a adquiri-lo por sua vez...

Embora o que vou dizer, como já reconheci, não tenha por base uma investigação sistemática, a minha experiência e os contactos que tenho tido com professores reforçam a minha convicção de que, pese embora os nomes de algumas cadeiras das ESE's (teoria dos números, geometria, etc.) não existe muitas vezes a percepção da necessidade, para os alunos das ESE's, de uma aprendizagem sistemática e não caótica (como a que resulta da exclusiva realização de actividades, por muito interessantes que sejam) dos temas de matemática que irão ensinar aos seus alunos dos primeiros ciclos de escolaridade. Na generalidade dos casos, os alunos das ESE's têm como materiais de estudo desses temas matemáticos apenas os seus caóticos apontamentos, uma mistura de resolução de actividades com notas retiradas das observações do professor, e no melhor dos casos uma breve síntese a propósito de algumas dessas actividades. Não parece ser reconhecido, em geral, que não é com esse tipo de recursos que os alunos das ESE's podem aprender matemática, e que não adianta nada ou muito pouco o fornecimento de uma bibliografia em geral inadequada (como é de esperar neste mundo português de manuais escolares e pouco mais). Para se avaliar bem esta inacreditável situação, diga-se que dessas bibliografias constam muitas vezes – e são a melhor coisa que lá aparece – os magníficos *Conceitos Fundamentais da Matemática* do Bento de Jesus Caraça, livro que nós líamos nos anos quarenta depois de estudar alguma matemática e não *em vez disso*... É significativo que ao fim de tantos anos já de existência das ESE's, não haja um único livro publicado e destinado à preparação matemática dos

alunos num ou mais temas fundamentais: números, geometria, medida, ... <sup>29</sup>

Numa conversa com uma (ótima) aluna finalista da variante Matemática e Ciências da Natureza, foi chocante constatar a enorme diferença, ao fim de quatro anos de frequência de uma ESE, entre o seu percurso em "educação" e o seu percurso em "matemática". Compreendia-se imediatamente a esplêndida preparação que a escola lhe tinha dado em tudo o que se referia às questões de carácter geral em educação e mesmo, em abstracto, às questões da didáctica da matemática. Quero com isto dizer que esta futura professora conhecia bem o papel do professor na sala de aula e claramente não papagueava apenas a respectiva teoria mas isso já lhe corria nas veias... Além disso, falava com intensa convicção da importância dos problemas e das investigações, por exemplo, no ensino da matemática. Mas, quando lhe perguntei como iria abordar a noção de área no dia seguinte, se tal fosse preciso, embatucou. Depois de instada, conseguiu recordar vagamente uma actividade com peças poligonais (que acabou por reconhecer que era para ajudar a distinguir os conceitos de área e perímetro...). Mas quanto ao conceito de área, nada feito. Não conhecia também nenhum livro ou recurso onde pudesse ir procurar apoio rapidamente. É importante notar que esta aluna tinha perfeita consciência da sua falta de preparação para o ensino da matemática elementar e que era precisamente essa a única crítica que fazia ao seu percurso escolar.

Assim, é minha convicção que nem os melhores alunos das melhores escolas adquirem uma preparação matemática que os faça estar à vontade perante os temas fundamentais do que vão ensinar nem que lhes permita ir aprofundando o seu conhecimento matemático ao longo dos anos.

### ***Ideias para alterar a situação actual***

As cadeiras de matemática da formação inicial de professores, seja para que nível for, têm que ter características especiais tanto no que diz respeito aos conteúdos como às metodologias empregues.

No que diz respeito aos conteúdos, uma percentagem elevada dessas cadeiras deve abordar os temas matemáticos que os futuros professores vão "ensinar" aos seus alunos. Essa abordagem deve ser feita de um ponto de vista superior ou avançado, e isto quer dizer (eventualmente entre outras coisas) o seguinte:

- os futuros professores devem adquirir um conhecimento aprofundado desses temas, não o mesmo nível de conhecimentos que são supostos ir ensinar aos seus futuros alunos;
- esse conhecimento aprofundado significa que
  - i) conhecem a evolução histórica dos conceitos envolvidos,
  - ii) conhecem e compararam criticamente as diferentes abordagens que podem ser dadas ao tema,
  - iii) conhecem a "história do ensino desse tema",
  - iv) conhecem o lugar que esse tema ocupa no "edifício" da matemática,
  - v) conhecem as conexões desse tema com os outros temas centrais da matemática.
- esse conhecimento aprofundado deverá permitir que os futuros professores reconheçam, nas dificuldades que os seus futuros alunos vão ter na apreensão de certo tema, os "obstáculos epistemológicos" que historicamente acompanharam a evolução dos conceitos.

No que diz respeito às metodologias, os professores do ensino superior que preparam professores devem utilizar correntemente nas suas aulas os métodos (trabalho de grupo, valor dado às actividades de investigação, trabalho de projecto, etc.), o discurso e os materiais (materiais manipuláveis, utilização dos recursos *online*, software dedicado à educação) que os seus alunos irão utilizar na educação básica e no ensino secundário.

Na preparação de professores para o ensino nos dois primeiros ciclos, as cadeiras de matemática não devem ser cadeiras de didáctica da matemática (embora estas devam evidentemente existir, mas de forma autónoma). De resto, são as características desejáveis dos conteúdos e metodologias na formação inicial de matemática que dão sentido e possibilidade à didáctica. Se "didáctica" relativa á introdução de determinado tema ou conceito quer dizer essencialmente discussão sobre a "escolha" – para tal tipo de alunos, no contexto de um determinado currículo, etc. – entre diversas abordagens possíveis desse tema ou conceito, então a cadeira de matemática o que deve dar ao futuro professor é o conhecimento matemático dessas diferentes abordagens que lhe permita participar com conhecimento de causa nessa discussão e escolha, e no futuro, perante diferentes contextos, o habilite a fazer a melhor escolha ou uma ainda mais apropriada abordagem imaginada por si. Além disso, as cadeiras de matemática devem dar um *background* aos futuros professores que lhes permita em qualquer momento perceber o contexto matemático implícito em que estão a actuar. Por exemplo, na geometria euclidiana existem diversas possibilidades de construção axiomática. Numa delas, derivada dos *Elementos* de Euclides, e revista por Hilbert, existem os termos primitivos ponto, recta e plano, seis relações indefinidas entre estes termos, como "situado entre" e "congruente com", e ainda um certo conjunto de axiomas.

Noutra, a noção primitiva é a noção de distância e o conjunto dos axiomas é diferente. Existe ainda um outro modo de encarar a geometria euclidiana – de resto, todas as geometrias – tendo por base certas noções primitivas e os (grupos de) transformações geométricas que as deixam invariantes. Está claro que o professor não irá abordar a geometria no ensino básico, nem no secundário, de forma axiomática ou segundo o programa de Erlangen... No entanto, seja qual for o seu discurso geométrico, é essencial para ele saber qual das vias está (em *background*) a adoptar. Sem isso, estará sempre inseguro e o seu discurso, mesmo sem ele se aperceber disso, é confuso e enganador.

Um outro inconveniente que tem o facto de se reduzir a matemática, na preparação dos professores dos primeiros anos, à didáctica da matemática, é levar os professores do ensino superior responsáveis por essas cadeiras a considerar implicitamente os seus alunos como meros intermediários; no fundo, o que estão a fazer é a dar “bons exemplos” de actividades dirigidas aos futuros alunos dos seus alunos, retirando a estes o papel fundamental e que deve ser autónomo de preparação das suas aulas. Julgo que esta prática não desenvolve profissionalmente os futuros professores.

### **Investigação**

É natural, num encontro da Secção de Matemática da SPCE, serem sugeridos novos temas para investigação, como resultado das questões debatidas. Julgo, como já disse, que terá resultados inteiramente previsíveis e pouco adiantará investigar se os professores de matemática que estão a ser formados pelas ESE's e das Universidades têm ou não uma boa preparação matemática para exercer a sua profissão. Mas isso não implica que não haja “nada para investigar”...

É conhecido, por exemplo, como o conceito de área (e de comprimento ou volume) é um dos temas da matemática mais maltratados em toda a escolaridade. Trata-se de um tema fundamental, uma conexão essencial entre a geometria e os números (inteiros, racionais, irracionais). Um projecto de investigação sobre este tema procuraria responder, entre outras, às seguintes questões:

- do ponto de vista matemático, que abordagens são possíveis para o conceito de área?
- que crítica se pode fazer à situação actual no ensino a este respeito?
- que podemos conhecer sobre a abordagem deste conceito do ponto de vista da história da educação?
- do ponto de vista do ensino, que opções estão disponíveis para a introdução da noção de área, e como podem essas estratégias ser integradas (compatibilizadas) ao longo dos ensinamentos básico e secundário?
- como poderiam ser concretizadas essas opções e quais seriam os méritos e deméritos relativos de cada estratégia?

Na mesma linha de pensamento, seriam possíveis, desejáveis e muito úteis outros projectos de investigação – nos quais “área” poderia ser substituída por “números reais”, “transformações geométricas”, ou outros temas da matemática escolar.

## Notas

1. Na fase de preparação deste texto e de reflexão sobre este tema, estabeleci comunicação com alguns colegas no sentido de me ajudarem a pensar sobre um assunto em meu entender tão difícil e tão importante. Agradeço a esses colegas a sua paciência e a sua ajuda. Alguns deles chegaram mesmo a enviar opiniões por escrito (Adelina Precatado, Cristina Loureiro, Lurdes Serrazina e Paulo Abrantes). No entanto, a responsabilidade dos disparates deste texto é apenas minha. O Paulo enviou-me em 3 de Abril de 2003 um texto, de que transcrevo aqui uma parte. Dedico este trabalho à sua memória.
2. John Dewey, "Nature of Subject Matter", in *John Dewey on Education: Selected writings*, org. de Reginald D. Archambault, p. 361.
3. Para evitar a multiplicação das designações usadas por vários investigadores, as quais significam, em nossa opinião, aproximadamente a mesma ideia, traduziremos *conceptual knowledge* por *conhecimento matemático*. *Conhecimento matemático* acerca de um procedimento matemático, ou de uma ideia matemática, ou de um conceito, significa *conhecer – do ponto de vista da matemática – muito mais* do que o resultado desse procedimento, do que o nome da ideia ou do conceito. Significa ter presente a justificação matemática desse procedimento, significa saber se existem outros procedimentos ou algoritmos com a mesma finalidade desse procedimento, significa conhecer as conexões dessa ideia ou desse conceito com outras ideias matemáticas, e também as origens e a evolução histórica desse conceito ou ideia. Mas significa, para além disso, conhecer o carácter das definições em matemática e o que quer dizer a frase "quem diz matemática, diz demonstração". Evidentemente que o conhecimento matemático acerca de um tópico não tem fim, e portanto ao dizer uma frase do tipo "os futuros professores devem ter um conhecimento matemático dos tópicos de matemática elementar que irão ensinar" apenas nos podemos estar a referir a um conhecimento matemático *mínimo* ou *suficiente*, o que é sem dúvida um conceito subjectivo... mas contra isso nada podemos fazer!
4. O relatório *The Mathematical Education of Teachers*, da *Conference Board of Mathematical Sciences*, está acessível online. Ver Referências Bibliográficas, em CBMS.
5. A questão da relação entre área e perímetro de um rectângulo é tratada, na tese de D. Ball, a partir da pág. 96.
6. Páginas 90 a 92 da tese de D. Ball.
7. Jornal "O Público", 19 de Agosto de 2001, in *Matemática: a Glosa do Seu Ensino*. Para ver todo o artigo, procurar no endereço <http://www.apm.pt/apm/noticias1.htm>
8. Jornal "O Público", 4 de Setembro de 2001, in *Educação para a Passividade?*. Para ver todo o artigo, procurar no endereço <http://www.apm.pt/apm/noticias1.htm>
9. A tese de Liping-Ma está editada em livro, ver Referências Bibliográficas.
10. Ver livro de Liping Ma, pág. xii.
11. Este trecho e os seguintes (e a alínea c)), de H. Wu, são extraídos do texto *Preservice professional development of mathematics teachers*, disponível no *website* de Wu: <http://math.berkeley.edu/~wu/>
12. A carta das associações participantes nos *Association Review Groups* (ARGs) pode ser lida na íntegra em <http://standards.nctm.org/document/prepost/apprec.htm>
13. Ver nas Referências Bibliográficas o livro do NCTM, em Kilpatrick.
14. No *website* de H. Wu poderá encontrar esses textos produzidos como apoio da formação de professores na Universidade de Berkeley.
15. O site deste encontro tem o endereço [http://www.cbmsweb.org/NationalSummit/national\\_summit.htm](http://www.cbmsweb.org/NationalSummit/national_summit.htm)
16. Ver nota 4.
17. A intervenção de Kirvan pode ler-se na íntegra no site referido na nota 15.
18. Com o título "On the education of mathematics majors". Ver Referências Bibliográficas.
19. Referidos no artigo de Al Cuoco (ver nota 21).
20. Referido no artigo de Al Cuoco (ver nota 21).
21. "Mathematics for Teaching". Ver Referências Bibliográficas.
22. Ver texto de Klein, referente a este exemplo, no livro indicado nas Referências Bibliográficas. Altere amos ligeiramente o exemplo de Klein. Para mais informações sobre número de ouro, fracções contínuas, convergentes, etc. procurar na rede, por exemplo no Google com as palavras "golden ratio continued fractions convergents".

23. Ver nas Referências Bibliográficas, em Félix, Lucienne.
24. *Message d'un Mathématicien: Henri Lebesgue*, pág. 180.
25. Idem, pág. 181.
26. *Les coniques*, pág. 2.
27. Idem, pág. 1.
28. *La mesure des grandeurs*, pág. 2.
29. Existem evidentemente alguns livros em português que podem ser utilizados na preparação matemática dos professores do 1º e 2º ciclos (um dos melhores é o *Geoplano na Sala de Aula*, de Lurdes Serrazina e José Manuel Matos). Mas livros sistemáticos de matemática por onde os alunos das ESE's possam realmente estudar, e a que possam recorrer posteriormente na sua vida profissional, nunca vi, mas posso estar enganado, e gostaria de o estar. Para se compreender bem do que estou a falar, ver por exemplo o livro de Musser em <http://he-cda.wiley.com/WileyCDA/HigherEdTitle/productCd-0471455865.html> ou o de O'Daffer em <http://www.aw.com/info/odafter/index.html> (poderá até fazer o download de capítulos disponíveis sobre a teoria dos números).

## Referências Bibliográficas

- APM (1994). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*. Tradução portuguesa dos Professional Standards do NCTM. Lisboa: APM.
- Archambault, Reginald D., org. (1974). *John Dewey on Education: Selected writings*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education*. Tese de doutoramento, acessível – bem como outros artigos e textos – na *homepage* de Deborah Ball: <http://www-personal.umich.edu/~dball/>
- Bryan, Tommy J. (1999). The conceptual knowledge of preservice secondary mathematics teachers: How well do they know the subject matter they will teach?. Publicado no site *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal*, endereço <http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/contentknowledge/volume.shtml>
- CBMS (2001). *The Mathematical Education of Teachers*. Disponível no site da CBMS: [http://www.cbmsweb.org/MET\\_Document/index.htm](http://www.cbmsweb.org/MET_Document/index.htm)
- Cuoco, Al (2001). Mathematics for Teaching. In *Notices of the American Mathematical Society*, Vol. 48, Number 2. Providence: American Mathematical Society.
- Kilpatrick, J., Martin, W. G. & Shifter, D.E. (org.) (2003). *A research companion to principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Klein, Felix (1908). *Elementary Mathematics form an Advanced Standpoint*. Tradução da 3ª edição alemã por E. R. Hedrick e C. A. Noble. New York: Dover Publications.
- Lebesgue, Henri (1975). *La Mesure des Grandeurs*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.
- Lebesgue, Henri (1988). *Les Coniques*. Paris: Éditions Jaques Gabay.
- Lucienne, Félix (org.) (1974). *Message d'un Mathématicien: Henri Lebesgue*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.
- Ma, Liping (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Wu, H. (1997). "On the education of mathematics majors". Disponível no site <http://math.berkeley.edu/~wu/>.