C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 917-922, 1998
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Méthodes d'approximation en théorie du point fixe et de l'équilibre

Bernard CORNET [a], **Marc-Olivier CZARNECKI** [b]

[a] CERMSEM, MSE, Université de Paris 1, 106-112, boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris, France
Courriel : cornet@univ-paris1.fr

[b] Laboratoire d'analyse convexe, Université de Montpellier 2, place Eugène-Bâtaillon, 34095 Montpellier cedex 5, France
Courriel : marco@math.univ-montp2.fr

(Reçu le 10 juin 1998, accepté le 11 septembre 1998)

Résumé. Nous donnons une condition suffisante pour l'existence d'équilibres (généralisés) et de points fixes de correspondances F, définies sur un ensemble compact $M \subset \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, lorsque l'ensemble M n'est supposé être ni convexe ni lisse. Nous considérons la classe $\mathcal{M}$ des sous-ensembles compacts, non vides de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant la condition de non-dégénérescence : $0 \notin \partial_+ \mathrm{d}_M(\overline{x}) \overset{\text{déf}}{=} \limsup_{x \to \overline{x},\, x \notin M} \partial \mathrm{d}_M(x)$, (la limite supérieure des sous-différentiels de Clarke de d_M, la fonction distance à M), pour tout $\overline{x} \in M$. Cette classe d'ensemble contient à la fois les sous-ensembles convexes, les sous-variétés différentiables (avec ou sans bord), et les sous-ensembles épi-lipschitziens de $\mathbb{R}^n$. La correspondance F est supposée être semi-continue supérieurement, à valeurs convexes, compactes, non vides. Si l'ensemble M a au moins une composante connexe de caractéristique d'Euler non nulle, nous montrons que F admet un équilibre généralisé x^*, au sens où $x^* \in M$ et $0 \in F(x^*) - \widetilde{N}_M(x^*)$, où $\widetilde{N}_M(x^*)$ est le cône engendré par $\partial_+ \mathrm{d}_M(x^*)$. Notre approche étend les résultats antérieurs d'existence d'équilibres généralisés : (i) en prenant un cône (non nécessairement convexe) $\widetilde{N}_M(x^*)$ plus petit que le cône normal de Clarke, et (ii) en considérant une classe d'ensembles plus grande que la classe des ensembles épi-lipschitziens. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Approximation methods in equilibrium theory

Abstract. *We provide a sufficient condition for the existence of (generalized) equilibria, or fixed-points for correspondences F, defined on a compact set $M \subset \mathbb{R}^n$, with values in $\mathbb{R}^n$, when the set M is neither assumed to be convex, nor smooth. We consider the class $\mathcal{M}$ of nonempty, compact subsets of $\mathbb{R}^n$ satisfying: $0 \notin \partial_+ \mathrm{d}_M(\overline{x}) \overset{\text{def}}{=} \limsup_{x \to \overline{x},\, x \notin M} \partial \mathrm{d}_M(x)$, for every $\overline{x} \in M$. The correspondence F is assumed to be upper semicontinuous with nonempty, convex, compact values. If M has at least one connected component with a nonzero Euler characteristic, we prove that F admits a generalized equilibrium x^* on M, i.e., $x^* \in M$ and $0 \in F(x^*) - \widetilde{N}_M(x^*)$, where $\widetilde{N}_M(x^*)$ is the cone spanned by $\partial_+ \mathrm{d}_M(x^*)$. Our approach extends previous results on the existence of generalized equilibria:* (i) *by taking a (non-necessarily convex) cone $\widetilde{N}_M(x^*)$ smaller than Clarke's normal cone, and* (ii) *by considering a larger class of sets than the class of epi-Lipschitzian sets.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Note présentée par Haïm Brézis.

Abridged English Version

Let F be a correspondence from $M \subset \mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$. If $S \subset M$ and $\overline{x} \in M$, we let: $\limsup_{x\to\overline{x},\, x\in S} F(x) = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \exists\,(x_k) \subset S,\ \exists\,(v_k) \subset \mathbb{R}^m,\ x_k \to \overline{x},\ v_k \in F(x_k),\ v_k \to v\}$. Then F is *upper semicontinuous* (u.s.c.) if, for every $\overline{x} \in M$, F is bounded on a neighborhood of $\overline{x}$ and if $\limsup_{x\to\overline{x},\, x\in M} F(x) \subset F(\overline{x})$. Let $M \subset \mathbb{R}^n$ be nonempty and closed, let $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ and $\partial \mathrm{d}_M(\overline{x})$ be Clarke's subdifferential of d_M, the distance function to M, at $\overline{x}$. Then we let:

$$\partial_+ \mathrm{d}_M(\overline{x}) = \limsup\nolimits_{x\to\overline{x},\, x\notin M} \partial \mathrm{d}_M(x).$$

The cone $\widetilde{N}_M(x)$ and Clarke's normal cone $N_M(x)$ are then defined at $x \in M$ by:

$$\widetilde{N}_M(x) = \textstyle\bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda \partial_+ \mathrm{d}_M(x) \cup \{0\} \text{ and } N_M(x) = \mathrm{cl}\Big(\bigcup_{\lambda\geq 0} \lambda \partial \mathrm{d}_M(x)\Big).$$

The aim of this Note is to find sufficient and necessary conditions on the set M for the following assertion to be satisfied, for $N = \widetilde{N}_M$, and $N = N_M$:

ASSERTION (GE;N). – *For every u.s.c. correspondence F from M to $\mathbb{R}^n$, with nonempty, convex, compact values, there exists a generalized N-equilibrium x^* of F, i.e., $x^* \in M$ such that $0 \in F(x^*) - N(x^*)$.*

We also look for the existence of equilibria in a more classical sense. More precisely, we consider the following assertion, where $N(x)^\circ$ denotes the negative polar cone of $N(x)$. When $N = N_M$ (or when $N = \widetilde{N}_M$), then $N(x)^\circ$ is Clarke's tangent cone to M at x.

ASSERTION (E;N) (Equilibria). – *For every u.s.c. correspondence F from M to $\mathbb{R}^n$, with nonempty, convex, compact values, such that $F(x) \cap N(x)^\circ \neq \emptyset$ for every $x \in M$, there exists an N-equilibrium $x^* \in M$ of F, i.e., $x^* \in M$ such that $0 \in F(x^*)$.*

We now introduce a class of sets, denoted $\mathcal{M}$:

DEFINITION 1. – A closed set $M \subset \mathbb{R}^n$ belongs to $\mathcal{M}$ if, for every $x \in M$, $0 \notin \partial_+ \mathrm{d}_M(x)$.

Remark 1. – A closed set $M \subset \mathbb{R}^n$ belongs to $\mathcal{M}$ in each of the following cases:

(i) M is convex;

(ii) M is a C^1 submanifold of $\mathbb{R}^n$, with or without corners, with or without a boundary;

(iii) M is epi-Lipschitzian, i.e., for every $x \in M$, $N_M(x) \cap (-N_M(x)) = \{0\}$.

We now state our main result of existence of equilibria for the class $\mathcal{M}$.

THEOREM 1. – *Let $M \in \mathcal{M}$, be nonempty and compact, then each of the following assertions* (GE;$\widetilde{N}_M$), (GE;N_M), *and* (E;N_M) *is satisfied if:*

ASSERTION (χ). – *M has a connected component M_i such that $\chi(M_i) \neq 0$, where $\chi(M_i)$ denotes the Euler characteristic of M_i.*

The converse of each of the implications in Theorem 1 may not be true. However, in the epi-Lipschitzian case, all the assertions are equivalent. Precisely:

THEOREM 2. – *Let M be a nonempty, compact, epi-Lipschitzian subset of $\mathbb{R}^n$. Then the four assertions* (χ), (GE;$\widetilde{N}_M$), (GE;N_M), *and* (E;N_M) *are equivalent and also equivalent to their single-valued cases.*

---

1. Équilibres et équilibres généralisés [1]

Une correspondance F de $M \subset \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$ est une application de M vers l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^m$. Le graphe de F est défini par $\mathrm{G}(F) = \{(x,y) \in M \times \mathbb{R}^m \mid y \in F(x)\}$. Si $S \subset M$ et $\overline{x} \in M$, on définit :

$$\limsup_{x\to\overline{x},\, x\in S} F(x) = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \exists\,(x_k) \subset S,\ \exists\,(v_k) \subset \mathbb{R}^m,\ x_k \to \overline{x},\ v_k \in F(x_k),\ v_k \to v\}.$$

La correspondance F est dite *semi-continue supérieurement* (s.c.s.) si, pour tout $\overline{x} \in M$, F est bornée sur un voisinage de $\overline{x}$ et si $\limsup_{x\to\overline{x},\, x\in M} F(x) \subset F(\overline{x})$.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est localement lipchitzienne, on définit son sous-différentiel en $\overline{x}$, noté $\partial f(\overline{x})$, et l'ensemble $\partial_+ f(\overline{x})$ par :

$$\partial f(\overline{x}) = \mathrm{co}\, \limsup_{x\to\overline{x},\, x\in\mathrm{dom}(\nabla f)} \{\nabla f(x)\}, \quad \partial_+ f(\overline{x}) = \limsup_{x\to\overline{x},\, f(x)>f(\overline{x})} \partial f(x)\ ^2,$$

où $\mathrm{dom}(\nabla f)$ est l'ensemble sur lequel f est différentiable [3]. La correspondance $x \mapsto \partial f(x)$ est s.c.s., à valeurs convexes compactes non vides (*voir* [3]), donc $\partial_+ f(\overline{x}) \subset \partial f(\overline{x})$ pour tout $\overline{x}$ (l'égalité n'étant pas vraie, en général). On montre que la correspondance $x \mapsto \partial_+ f(x)$ est s.c.s., à valeurs compactes (non nécessairement convexes) et que l'ensemble $\partial_+ f(x)$ est non vide si et seulement si x n'est pas un maximum local f. Si f est C^1 sur un voisinage de x, rappelons que $\partial_+ f(x) \subset \partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$.

Si $M \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et si $x \in M$, on note $\mathrm{d}_M(x) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in M\}$, la distance de M à x, et on remarque que l'application $x \mapsto \mathrm{d}_M(x)$ est lipschitzienne de rapport 1. On peut ainsi définir le cône $\widetilde{N}_M(x)$ et le cône normal de Clarke $N_M(x)$ par :

$$\widetilde{N}_M(x) = \bigcup\nolimits_{\lambda\geq 0} \lambda\partial_+\mathrm{d}_M(x) \cup \{0\} \quad \text{et} \quad N_M(x) = \mathrm{cl}\Big(\bigcup\nolimits_{\lambda\geq 0} \lambda\partial\mathrm{d}_M(x)\Big)\ ^4,$$

et on montre que $\widetilde{N}_M(x) \subset N_M(x)$ et $\mathrm{cl}\,\mathrm{co}\widetilde{N}_M(x) = N_M(x)$ pour tout $x \in M$.

Le but de cette Note est d'étudier l'équation généralisée $0 \in F(x^*) - N(x^*)$ (appelée aussi inéquation variationnelle lorsque M est convexe et $N = N_M$), où, pour tout $x \in M$, $N(x)$ est un cône (non supposé convexe) que l'on choisit dans la suite parmi les différents candidats « cônes normaux ». Nous considérons dans cette Note essentiellement les deux cas suivants : $N(x) = N_M(x)$ et $N(x) = \widetilde{N}_M(x)$, en remarquant que plus grand est le cône dans l'équation généralisée ci-dessus, plus grand est son ensemble de solutions.

1.1. *Un premier résultat d'existence lorsque* $N = \widetilde{N}_M$. – Nous énonçons un premier résultat d'existence de solutions de l'équation généralisée ci-dessus lorsque $N = \widetilde{N}_M$ (qui impliquera immédiatement l'existence de solutions lorsque $N = N_M$ puisque nous rappelons que $\widetilde{N}_M(x) \subset N_M(x)$). Plus précisément, nous donnons des conditions suffisantes sur l'ensemble M pour que l'assertion suivante soit vérifiée pour $N = \widetilde{N}_M$:

ASSERTION (EG;N) (équilibres généralisés). – *Pour toute correspondance s.c.s. F de M dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs convexes compactes non vides, il existe un N-équilibre généralisé x^* de F, i.e., $x^* \in M$ tel que* $0 \in F(x^*) - N(x^*)$.

Dans ce but, nous introduisons la classe, notée $\mathcal{A}$, des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, approchables par des ensembles lisses au sens suivant :

DÉFINITION 1.1. – On dit qu'une suite (M_k) de sous-ensembles ferms de $\mathbb{R}^n$ est une approximation normale lisse du sous-ensemble fermé $M \subset \mathbb{R}^n$ si :

(i) pour tout k, M_k est lisse, i.e, une sous-variété à bord C^∞ de $\mathbb{R}^n$, de pleine dimension ;

(ii) $M_{k+1} \subset \mathrm{int}\, M_k \subset \mathrm{B}(M,1)$ pour tout k, et $M = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} M_k$;

(cn) $\limsup_{k\to\infty} \mathrm{G}(N_{M_k}) \subset \mathrm{G}(\widetilde{N}_M)$;

(ret) pour tout k, M est un retract par déformation lipschitzienne de M_k, i.e., il existe une application lipschitzienne $H : M_k \times [0,1] \to M_k$ telle que, pour tout $x \in M_k$, $H(x,0) = x$ et $H(x,1) \in M$, et pour tout $x \in M$, $H(x,1) = x$.

On peut toujours approcher un ensemble fermé quelconque $M \subset \mathbb{R}^n$ par une suite (M_k) décroissante de fermés lisses (i.e., vérifiant les deux premières conditions de la définition ci-dessus). Mais cette seule information ne permet, en général, ni de comparer les solutions des équations généralisées sur M et M_k, ni de relier les propriétés topologiques de M et de M_k, ce que permettent, respectivement, les deux conditions (cn) et (ret).

Nous donnons en section 2 une condition suffisante simple sur M pour qu'une telle approximation existe. Les résultats d'existence contenus dans cette Note se déduisent du principe général énoncé dans la proposition suivante. Si $M \in \mathcal{A}$ est un ensemble compact, on note $\chi(M)$ sa caractéristique d'Euler et on montre qu'elle est bien définie.

PROPOSITION 1.1. – *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact, non vide, admettant une approximation normale lisse. Alors l'assertion* (EG;$\widetilde{N}_M$) *est vérifiée si :*

ASSERTION (χ). – *M a une composante connexe M_i telle que $\chi(M_i) \neq 0$* [5].

La preuve de ce résultat utilise une double approximation de la correspondance F et de l'ensemble M (ou d'une composante connexe de M) pour se ramener au théorème de Poincaré–Hopf (dans le cas lisse classique), en remarquant que $\chi(M_k) = \chi(M)$ pour tout k (d'après la condition de rétraction (ret)). La solution s'obtient par passage à la limite en utilisant la condition (cn) de convergence des normales.

La réciproque de la proposition 1.1 peut être fausse ; considérer, dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $M = S \cup [0,2] \times \{0\}$ (où S désigne la sphère unité), pour lequel $\chi(M) = 0$ et $\widetilde{N}_M(1,0) = \mathbb{R}^2$. Mais elle est vraie pour une classe d'ensembles que nous considrons plus loin.

1.2. *Quelques conséquences.* – Montrons le lien entre le problème précédent et le problème d'existence d'équilibres plus traditionnellement considéré dans la littérature. Considérons dans ce but l'assertion suivante, où $N(x)^\circ$ désigne le cône polaire négatif de $N(x)$. Lorsque $N = N_M$ (ou $N = \widetilde{N}_M$, en rappelant que $\mathrm{cl\,co}\widetilde{N}_M(x) = N_M(x)$ pour tout $x \in M$), $N(x)^\circ$ est clairement le cône tangent de Clarke à M en x.

ASSERTION (E;N) (équilibres). – *Pour toute correspondance s.c.s. F de M dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs convexes compactes non vides, telle que $F(x) \cap N(x)^\circ \neq \emptyset$ pour tout $x \in M$, il existe un équilibre x^* de F, i.e., $x^* \in M$ tel que $0 \in F(x^*)$.*

On reformule (E;N), de manière équivalente, en termes d'existence de points fixes :

ASSERTION (PF;N) (points fixes). – *Pour toute correspondance s.c.s. F de M dans $\mathbb{R}^n$, à valeurs convexes compactes non vides, telle que $F(x) \cap \left(\{x\} + N(x)^\circ\right) \neq \emptyset$, pour tout $x \in M$, il existe un point fixe x^* de F, i.e., $x^* \in M$ tel que $x^* \in F(x^*)$.*

Examinons maintenant le lien entre les conditions (EG;N) et (E;N). Lorsque M est compact et la correspondance N est de graphe fermé (i.e., $G(N)$ est fermé dans $M \times \mathbb{R}^n$), alors on montre l'implication (EG;N)$\Rightarrow$(E;N). Si on suppose de plus que $N(x)$ est convexe pour tout $x \in M$, alors on obtient aussi la réciproque (E;N)$\Rightarrow$(EG;N). L'équivalence (E;$\widetilde{N}_M$)$\Leftrightarrow$(E;N_M) est immédiate, puisque $\mathrm{cl\,co}\widetilde{N}_M(x) = N_M(x)$; l'implication (EG;$\widetilde{N}_M$)$\Rightarrow$(EG;N_M) est toujours vérifiée, mais la réciproque peut être fausse (considérer le carré $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sup\{|x|,|y|\} = 1\}$). De ces remarques -en considérant en fait une troisième correspondance N- et de la proposition 1.1, nous déduisons :

PROPOSITION 1.2. – *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact, non vide, qui admet une approximation normale lisse. Alors la condition (χ) implique chacune des trois assertions suivantes* (EG;$\widetilde{N}_M$), (EG;N_M) *et* (E;N_M).

1.3. *Le cas épi-lipschitzien : la condition (χ) est nécessaire et suffisante.* – L'étude des assertions (EG;N_M) et (E;N_M) a été considérée par [8] lorsque M est épi-lipschitzien, i.e., tel que $N_M(x)$ soit saillant (i.e. $N_M(x) \cap -N_M(x) = \{0\}$), pour tout $x \in M$.

THÉORÈME 1.1. – *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ épi-lipschitzien compact non vide. Alors les cinq assertions* (χ), (EG;$\widetilde{N}_M$), (EG;N_M), (E;N_M) *et* (PF;N_M) *sont équivalentes, ainsi qu'à leurs versions univoques.*

Le théorème 1.1 généralise les résultats connus en dimension finie dans le cas convexe et dans le cas lisse. Si M est convexe, l'implication ($\chi(M) \neq 0$)$\Rightarrow$(PF;N_M) est le théorème d'existence de points fixes pour les correspondances rentrantes, démontré par une longue tradition d'auteurs dans le cadre plus général de la dimension infinie, et qui généralise aussi les résultats classiques de Brouwer et Kakutani. Si M est lisse, l'implication, dans le cadre univoque, ($\chi(M) \neq 0$)$\Rightarrow$(E;N_M) correspond à la partie existence du théorème de Poincaré–Hopf. La réciproque (E;N_M)⇒($\chi(M) \neq 0$) est classique, dans le cadre univoque, si on suppose de plus que M est connexe (*voir*, par exemple, [10]).

L'implication ($\chi(M) \neq 0$)⇒(EQ;N_M) a été montrée par Cornet [5] dans le cas épi-lipschitzien, à l'aide du degré topologique, et dans un cadre plus général par Ben-El-Mechaiekh et Kryszewski [2], avec des techniques de topologie algébrique. Dans le cadre épi-lipschitzien, la réciproque, i.e., l'implication (EQ;N_M)⇒(χ), est due à Cornet et Czarnecki [8]. Mentionnons aussi Clarke, Ledyaev et Stern [4] qui montrent que l'assertion (EQ;N_M) est vraie si M est un sous-ensemble épi-lipschitzien compact de $\mathbb{R}^n$, homéomorphe à un ensemble convexe (ce qui implique que $\chi(M) = 1$).

2. Existence d'approximations normales lisses

Dans cette section, nous explicitons une classe $\mathcal{M}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, dont tous les éléments M admettent une approximation normale lisse.

DÉFINITION 2.1. – Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-ensembles fermés $M \subset \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $x \in M$, l'une des deux assertions équivalentes suivantes (i) ou (ii) soit vérifiée :

(i) $0 \notin \partial_+ \mathrm{d}_M(x)$ [6] ; (ii) $\exists\, \varepsilon > 0$, $\forall\, x' \in \mathrm{B}(x, \varepsilon) \setminus M$, $\forall\, p \in \partial \mathrm{d}_M(x')$, $\|p\| \geq \varepsilon$.

La classe $\mathcal{M}$ contient en particulier les ensembles convexes, les sous-variétés différentiables et les ensembles épi-lipschitziens comme le montrent les propositions 2.1 et 2.2.

PROPOSITION 2.1. – *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé. Alors M est épi-lipschitzien si et seulement si $0 \notin \mathrm{co}\partial_+ \mathrm{d}_M(x)$, pour tout $x \in M$.*

PROPOSITION 2.2. – *La classe $\mathcal{M}$ contient les ensembles fermés $M \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant l'une des conditions :*

(i) *M est convexe ;*
(ii) *$\mathbb{R}^n \setminus M$ est convexe ;*
(iii) *M est une sous-variété C^1 de $\mathbb{R}^n$, avec ou sans coins, avec ou sans bord* [7] *;*
(iv) *M est épi-lipschitzien.*

Nous énonçons maintenant le résultat principal sur la classe d'ensembles $\mathcal{M}$.

THÉORÈME 2.1. – *Tout ensemble compact $M \in \mathcal{M}$ admet une approximation normale lisse et la correspondance $\widetilde{N}_M$ est de graphe fermé* [8].

COROLLAIRE 2.1. – *Pour tout ensemble compact, non vide $M \in \mathcal{M}$, la condition (χ) implique chacune des trois assertions* (EG;$\widetilde{N}_M$), (EG;N_M) *et* (E;N_M).

La réciproque du corollaire peut être fausse (comme celle de la proposition 1.1).

2.1. *Démonstration du théorème* 2.1 (principales idées). – Soit $M \in \mathcal{M}$, d'après la définition 2.1, $\widetilde{N}_M$ est clairement de graphe fermé. Les conditions (i), (ii) et (cn) de la définition 1.1 se déduisent directement du résultat de représentation ci-dessous en prenant la suite (M_k) définie par $M_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_M(x) \leq 1/k\}$, pour k assez grand.

La condition de rétraction (ret) se montre en suivant le champ de gradient de f_M, en généralisant la preuve du cas épi-lipschitzien donnée par [7].

THÉORÈME 2.2. – *Soit $M \in \mathcal{M}$, il existe une application $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ telle que :*

(a) $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_M(x) = 0\}$;
(b) *f_M est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$, et C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus M$;*
(c) *$f_M(x) = 1$ si $x \notin \mathrm{B}(M, 1)$;*
(d) $\forall\, \overline{x} \in M$, $\exists\, \varepsilon > 0$, $\forall\, x \in \mathrm{B}(\overline{x}, \varepsilon) \setminus M$, $\|\nabla f_M(x)\| \geq \varepsilon$;
(e) $\forall\, \overline{x} \in M$, $\partial_+ f_M(\overline{x}) \subset \partial_+ \mathrm{d}_M(\overline{x})$, *donc* $\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial_+ f_M(\overline{x}) \subset \widetilde{N}_M(\overline{x})$.

Le théorème 2.2 est une adaptation du théorème de représentation de [6] qui considère le cadre épi-lipschitzien, en prenant l'application $\Delta_M = \mathrm{d}_M - \mathrm{d}_{\mathbb{R}^n \setminus M}$. Ici, nous lissons directement l'application distance d_M, qui ne donne aucune information sur l'intérieur de M. Nous ne pouvons donc obtenir qu'une approximation externe, alors que dans le cas épi-lipschitzien nous obtenions aussi une approximation interne.

Démonstration du théorème 2.2. – Nous « lissons » l'application d_M par un argument de convolution pour obtenir une application f_M satisfaisant les conclusions du théorème 2.2. Plus précisément, étant donné une application $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ de classe C^1, nous définissons l'application $f_\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par :

$$f_\rho(x) = \int_{\overline{\mathrm{B}}(0,1)} \theta(t)\mathrm{d}_M(x - \rho(x)t)\mathrm{d}t, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

où θ est un noyau de convolution. On a besoin de considérer ci-dessus l'application ρ pour que dans le « lissage de d_M en x », l'intégrale ne prenne en compte que des points $x - \rho(x)t$ du complémentaire de M, lorsque x appartient au complémentaire de M. On impose donc pour cela comme première condition sur ρ le fait que $\rho \leq \mathrm{d}_M$. Nous ne pouvons pas prendre ci-dessus $\rho = \mathrm{d}_M$ car l'application f_{d_M} n'est pas différentiable en général, même exemple en dimension 1.

---

[1] On note $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ appartiennent à $\mathbb{R}^n$, on note le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ par $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, la norme euclidienne par $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$ et $\mathrm{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\}$. Si $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, nous notons $X \setminus Y = \{x \in X \mid x \notin Y\}$, $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$, $\mathrm{B}(X,r) = X + \mathrm{B}(0,r)$, $\mathrm{cl}\, X$, la fermeture de X, $\mathrm{int}\, X$, l'intérieur de X, et $\mathrm{co}\, X$, l'enveloppe convexe de X, $X^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall x \in X,\ (x \mid y) \leq 0\}$, le polaire négatif de X. Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et un nombre réel $k \geq 0$ tels que $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$, pour tous x_1, x_2 dans V. Si f est différentiable en x, on note $\nabla f(x)$ le gradient de f en x.

[2] De même, on peut aussi définir $\nabla_+ f(\overline{x}) = \limsup_{x \to \overline{x},\, x \in \mathrm{dom}(\nabla f),\, f(x) > f(\overline{x})} \{\nabla f(x)\}$ et on montre que, pour tout x, $\nabla_+ f(\overline{x}) \subset \partial_+ f(\overline{x}) \subset \mathrm{co}\nabla_+ f(\overline{x}) = \mathrm{co}\partial_+ f(\overline{x}) \subset \partial f(\overline{x})$. Mais l'ensemble $\nabla_+ f(\overline{x})$ est trop petit pour remplacer $\partial_+ f(\overline{x})$ dans le problème considéré ici (voir note 6).

[3] D'après le théorème de Rademacher, la mesure de $\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{dom}(\nabla f)$ est nulle.

[4] De même, on peut aussi définir le cône normal limite $\widehat{N}_M(x) = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \nabla_+ \mathrm{d}_M(x)$ et on montre que $\widehat{N}_M(x) \subset \widetilde{N}_M(x) \subset N_M(x)$, et $\mathrm{cl}\,\mathrm{co}\widehat{N}_M(x) = \mathrm{cl}\,\mathrm{co}\widetilde{N}_M(x) = N_M(x)$ pour tout $x \in M$.

[5] Cette hypothèse a un sens, car la condition de rétraction (ret) implique que les composantes connexes de M sont en nombre fini et appartiennent aussi à $\mathcal{A}$. L'assertion (χ) est vérifiée si $\chi(M) \neq 0$ (mais la réciproque est fausse en général), ou si M est convexe (auquel cas $\chi(M) = 1$).

[6] On ne peut pas étendre la classe d'ensembles considérée en remplaçant dans (i), l'ensemble $\partial_+ \mathrm{d}_M(x)$ par $\nabla_+ \mathrm{d}_M(x)$ défini dans la note 2 (i.e., en remplaçant dans (ii) $\partial \mathrm{d}_M(x')$ par $\{\nabla \mathrm{d}_M(x')\}$). En effet, si d_M est différentiable en x, alors $\nabla \mathrm{d}_M(x)$ est de norme 1 donc $\nabla_+ \mathrm{d}_M(x) \subset S$, et la condition $0 \notin \nabla_+ \mathrm{d}_M(x)$ est donc vérifée pour tout $x \in M$.

[7] L'assertion (iii) n'est plus vraie si on remplace C^1 par lipschitzien (*voir* [1], paragraphe 13, exemple 8).

[8] Lorsque $M \in \mathcal{M}$, la correspondance N_M (cône normal de Clarke) peut ne pas être de graphe fermé.

Références bibliographiques

[1] Adams R., Aronszajn N., Smith K.T., Theory of Bessel potentials, part II, Ann. Inst. Fourier Grenoble 17 (1967).

[2] Ben-El-Mechaiekh H., Kryszewski W., Equilibria of set-valued maps on nonconvex domains, Trans. Amer. Math. Soc. 349 (10) (1997) 4159–4179.

[3] Clarke F., Optimization and nonsmooth analysis, John Wiley, New York, 1983.

[4] Clarke F., Ledyaev Y.S., Stern R.J., Fixed points and equilibria in nonconvex sets, Nonlin. Anal. 25 (1995) p. 145–161.

[5] Cornet B., Euler characteristics and fixed-point theorems, (1992) (à paraître).

[6] Cornet B., Czarnecki M.-O., Smooth representations of epi-Lipschitzian subsets of $\mathbb{R}^n$, Nonlin. Anal. (à paraître) ; voir aussi C. R. Acad. Sci. t 325 Série I (1997) 475–480.

[7] Cornet B., Czarnecki M.-O., Approximation of epi-Lipschitzian subsets of $\mathbb{R}^n$, SIAM J. Control Optim. (à paraître) ; voir aussi C. R. Acad. Sci. t 325 Série I (1997) 583–588.

[8] Cornet B., Czarnecki M.-O., Necessary and sufficient conditions for the existence of (generalized) equilibria on a compact epi-Lipschitzian domain, Cahier Eco-Maths no. 95-55, Université de Paris 1, 1995.

[9] Spivak M., Differential Geometry, Vol. 1, 2e édition, Publish or Perish, Inc., Delaware, 1970.